TD Calcul différentiel

Roulley Emeric

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, en tout point de $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
b. Montrer que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
b. Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
b. Montrer que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées selon tout vecteur non-nul au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

5. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
b. Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

6. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
b. Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

7. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
b. Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

8. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
b. Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.
c. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles, que l'on calculera, au point $(0,0)$.
d. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
e. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \Omega$.
On suppose que $f(x_0) \neq 0$. On suppose également que f est différentiable au point x_0.
Montrer que la fonction $g = \frac{1}{f}$ définie au voisinage de x_0 est différentiable au point x_0 et calculer $\nabla g(x_0)$.

10. Soit $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Ω un ouvert convexe non-vide de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application différentiable de Ω dans $\mathbb{R}^n$.
On suppose que la dérivée partielle $\partial_{x_1} f$ est nulle en tout point de Ω.
montrer que la fonction f ne dépend pas de la variable x_1.

11. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = xy + x + 3y.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Montrer que la fonction f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

12. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

13. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

14. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

15. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = xe^{-x-y^4}.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

16. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

17. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^4 + y^4 - xy.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

18. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

a. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer les points critiques de la fonction f.
c. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

19. (Théorème de Rolle multidimensionnel)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\overline{B}$ (resp. B) la boule fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
Soit f une application de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et différentiable sur B.
On suppose que l'application f est constante sur la sphère unité S.
Montrer qu'il existe $x_0 \in B$ tel que $\nabla f(x_0) = 0$.

20. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application différentiable de Ω dans $\mathbb{R}$.
Soit (I, φ) un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^1$ régulier dont le support est inclus dans Ω.
On considère la fonction g de I dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in I, g(t) = f(\varphi(t))$.
a. Montrer que la fonction g est dérivable sur I et exprimer sa dérivée à l'aide du gradient de f. Interpréter géométriquement le résultat.
b. Montrer que la fonction f est constante sur le support de l'arc paramétré (I, φ) si et seulement si pour tout $t \in I$, le gradient de la fonction f au point $\varphi(t)$ est normal à l'arc en ce point.

21. On considère l'ensemble $\Omega = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / x + y < \pi\}$.
a. Justifier que Ω est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\overline{\Omega}$. Représenter graphiquement Ω et $\overline{\Omega}$.
b. On considère la fonction f de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \overline{\Omega}, f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$.
Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Montrer que la fonction f est bornée sur $\overline{\Omega}$ et atteint ses bornes, que l'on précisera, ainsi que les points de $\overline{\Omega}$ où elles sont atteintes.
c. Représenter le champ de gradient de la fonction f sur Ω.

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f(x) = \frac{x}{\| x \|^2}.$$

Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\| x \|^2}.$$

a. Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \nabla f(x) = \frac{1}{\| x \|^2} \left((u + u^*)(x) - \frac{2}{\| x \|^2} \langle u(x), x \rangle x \right).$$

b. On suppose désormais que l'endomorphisme u est auto-adjoint.
Montrer que $f(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = f(S)$ où S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
En déduire que la fonction f admet un maximum global sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, atteint en un point $x_0 \in S$.
Montrer que x_0 est un vecteur propre de l'endomorphisme u.
c. Retrouver le résultat précédent à l'aide du cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
d. Redémontrer ainsi le théorème d'orthodiagonalisation des endomorphismes auto-adjoints d'un espace vectoriel euclidien.

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un endomorphisme auto-adjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x \rangle e^{-\|x\|^2}.$$

a. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f(x) > 0$.
Montrer que $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leqslant C \| x \|^2 e^{-\|x\|^2}$.
b. En déduire que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^n$ et atteint son maximum.
c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^n$.
d. Calculer $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a. On considère la fonction f de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = M^2$.
Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.
b. Justifier que l'application déterminant déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles (dans la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$) en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.
En déduire sa différentielle en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.
Retrouver la différentielle du déterminant par un calcul direct.

26. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|.$$

Déterminer les points de $\mathbb{R}^p$ en lesquels la fonction f est différentiable et préciser le gradient de la fonction f en ces points. Interpréter géométriquement le résultat.

27. $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle.
a. Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0\}$. On note θ l'angle orienté entre l'axe des abscisses (orienté) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
i. Montrer que si $x > 0$, alors l'unique détermination de l'angle polaire θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
ii. Montrer que si $x < 0$, alors l'unique détermination de l'angle polaire θ dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ est $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.
iii. Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\}$, alors l'unique détermination de l'angle polaire θ dans $]-\pi, \pi[$ est $2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble des fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha.$$

Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère la fonction F de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, F(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
i. Justifier que la fonction F est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et 2π-périodique en la variable θ.
ii. Montrer que la fonction f appartient à $\mathcal{E}_\alpha$ si et seulement si la fonction F est solution sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une équation aux dérivées partielles simple que l'on précisera et résoudra.
iii. Déterminer $\mathcal{E}_\alpha$.
iv. Déterminer les fonctions de $\mathcal{E}_\alpha$ continûment prolongeable en $(0,0)$.
v. Déterminer les fonction différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha.$$

c. Soit $k \in \mathbb{R}$.
i. Par une méthode analogue à celle utilisée à la question précédente, déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) \in \mathbb{R}^2/x<0\}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) \in \mathbb{R}^2/x<0\}, x\partial_y f(x,y) - y\partial_x f(x,y) = kf(x,y).$$

ii. Déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, x\partial_y f(x,y) - y\partial_x f(x,y) = kf(x,y).$$

iii. Déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\partial_y f(x,y) - y\partial_x f(x,y) = kf(x,y).$$

d. Soit $k \in \mathbb{R}$.
i. Par une méthode analogue à celle utilisée à la question précédente, déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = kf(x,y).$$

ii. Déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = kf(x,y).$$

28. (Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes)
Soit $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Ω désigne $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$. Soit f une fonction différentiable de Ω dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $k \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est homogène de degré k sur Ω si $\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tx) = t^k f(x)$.
a. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, donner un exemple de fonction différentiable non-identiquement nulle de $\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$ homogène de degré k sur $\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$.
Expliciter toutes les fonctions différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ homogènes de degré 0 sur $\mathbb{R}^p$.
Montrer que si $k<1$ et $k \neq 0$, alors la seule fonction différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ homogène de degré k sur $\mathbb{R}^p$ est la fonction identiquement nulle.
Pour tout $k \geqslant 1$, donner un exemple de fonction différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ homogène de degré k sur $\mathbb{R}^p$.
b. Montrer que la fonction f est homogène de degré k sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega, (df(x))(x) = kf(x)$.
c. Déterminer les fonctions différentiables f de Ω dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall x \in \Omega, \sum_{i=1}^{p} x_i \partial_{x_i} f(x) = kf(x).$$

d. Expliciter toutes les fonctions différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ homogènes de degré 1 sur $\mathbb{R}^p$.

29. Soit $a \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variables $(u,v) = (x+y, x-y)$, déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles (équation de transport) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = a.$$

30. En effectuant le changement de variables $(u,v) = (x+y, x-y)$, déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles (équation des ondes) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_{xx}^2 f(x,y) - \partial_{yy}^2 f(x,y) = 0.$$

31. On appelle laplacien l'opérateur différentiel Δ défini sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \Delta f(x,y) = \partial^2_{xx} f(x,y) + \partial^2_{yy} f(x,y).$$

a. Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires.
b. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\mathbb{R})$ est harmonique si $\Delta f = 0$ (équation de Laplace).
Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ harmonique et isotropes (i.e. ne dépendant pas de l'angle polaire θ).

32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
b. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme involutif de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ dont on calculera la différentielle.

33. On considère la fonction f de la variable $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2(x+iy)} dt.$$

a. Déterminer le domaine de définition Ω de la fonction f. Vérifier que Ω est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $(x,y) \in \Omega$ calculer $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x,y)$.

34. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction différentiable de Ω dans $\mathbb{R}$.
a. Montrer que la fonction f est convexe sur Ω si et seulement si $\forall (x,y) \in \Omega^2, f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$.
b. Montrer que la fonction f est convexe sur Ω si et seulement si $\forall (x,y) \in \Omega^2, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant 0$.

35. Soit Ω un ouvert non-vide du plan vectoriel euclidien $\mathbb{C}$.
Soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
On dit que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 si la fonction $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ (définie au voisinage épointé de z_0 (car Ω est ouvert)) admet une limite $l \in \mathbb{C}$ au point z_0. Dans ce cas, la limite l est appelée nombre dérivé de la fonction f au point z_0 et est noté $f'(z_0)$.
a. Soit $l \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 de dérivée l si et seulement si

$$f(z_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(z_0) + hl + o(h).$$

b. Montrer que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 si et seulement si la fonction f est différentiable au point z_0 et sa matrice jacobienne au point z_0 (dans la base $(1,i)$) est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
c. En déduire que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 si et seulement si la fonction f est différentiable au point z_0 et sa différentielle au point z_0 est l'endomorphisme nul ou une similitude vectorielle directe du plan vectoriel euclidien $\mathbb{C}$ (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in SO(\mathbb{C})$ tels que $df(z_0) = \lambda u$).