TD Ensembles et applications

Roulley Emeric

Soient E, F et G trois ensembles non-vides.

I) Ensembles

1.a. Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. En déduire $E = F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.
b. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
c. A-t-on $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
d. Plus généralement, si I désigne un ensemble et si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, a-t-on $\mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$ et $\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$?
2. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
a. Montrer que $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$.
b. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
c. Montrer que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
d. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

3. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On appelle différence symétrique des ensembles A et B l'ensemble

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

a. Faire un dessin généraliste représentant $A\Delta B$.
b. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$.
c. Montrer que $(A\Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = \emptyset = B)$.
d. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
e. Montrer que $(\forall C \in \mathcal{P}(E), A\Delta C = B\Delta C) \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow A\Delta B = \emptyset$.

4. Comparer $\mathcal{P}(E^2)$ et $\mathcal{P}(E)^2$.

5. Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $(B_1, B_2) \in \mathcal{P}(F)^2$.
a. Montrer que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
b. Montrer que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.
c. A-ton $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

II) Applications injectives, surjectives et bijectives

1. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \qquad j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1+x} \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

$$l : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^*\backslash\{1\}) & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & p + \frac{1}{q} \end{array} \qquad m : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad n : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

2.a. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.
b. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.
c. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$.

3. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.
a. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.

b. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
c. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrer que f est bijective (on donnera deux méthodes dont l'une utilisera la question **2.a.**).
d. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrer que g est bijective (on donnera deux méthodes dont l'une utilisera la question **2.b.**).

4. Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que (f est injective) $\Leftrightarrow$ (f est surjective).

5. Soit $(f, g, h) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(F, G) \times \mathcal{F}(G, E)$ tel que $h \circ g \circ f$ est injective et $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

6. On dit qu'un ensemble D est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.
a. Montrer que l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) est dénombrable.
b. Montrer que $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

7. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On considère les applications φ_A et ψ_A définies sur $\mathcal{P}(E)$ par $\forall X \in \mathcal{P}(E), \varphi_A(X) = A \cap X$ et $\psi_A(X) = A \cup X$.
a. Montrer que (φ_A est injective) $\Leftrightarrow$ (φ_A est surjective) $\Leftrightarrow A = E$.
b. Montrer que (ψ_A est injective) $\Leftrightarrow$ (ψ_A est surjective) $\Leftrightarrow A = \emptyset$.

8. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$.
a. Montrer que (f est injective) $\Leftrightarrow A \cup B = E$.
b. Montrer que (f est surjective) $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
c. Montrer que (f est bijective) $\Leftrightarrow A \sqcup B = E$.

9. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on considère la fonction indicatrice de la partie A, notée $\mathbf{1}_A$, définie par :

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccl} E & \to & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

a. Dessiner la fonction indicatrice de la partie $A = [-4, -1] \cup [1, 5[$ de $\mathbb{R}$.
b. Expliciter les $\nVdash_E$ et $\mathbf{1}_\emptyset$.
c. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
i. Montrer que $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$.
ii. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$.
iii. Montrer que $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
iv. Montrer que $\mathbf{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.
v. Montrer que $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
vi. Montrer que $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$.
vii. Montrer que $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)$.
d. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$ est une bijection.

III) Images directes et images réciproques

1. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
Montrer que $\mathbf{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbf{1}_B \circ f$.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
a. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
b. Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
c. Montrer que (f est injective) $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
d. Montrer que (f est surjective) $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$.

3. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
a. Montrer que (f est injective) $\Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
b. Montrer que (f est bijective) $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

IV) Relations d'équivalence

1.a. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

i. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
ii. Donner les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ (faire un dessin).
iii. Montrer que cette relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ est la même que la relation binaire $\mathcal{R}'$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

b. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

i. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
ii. Donner les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ (faire un dessin).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la relation binaire $\equiv$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, k \equiv l \Leftrightarrow k - l \in n\mathbb{Z}.$$

i. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
ii. Donner les classes d'équivalence de la relation $\equiv$ (faire un dessin).
La relation $\equiv$ est appelée relation de congruence modulo n.

3. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

i. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
ii. Donner les classes d'équivalence de la relation $\mathbb{R}$.

V) Relations d'ordre

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injective.
On considère la relation binaire $\propto$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \propto y \Leftarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Montrer que $\propto$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la relation binaire $\preceq$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2, f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x).$$

a. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b. Cet ordre est-il total ?

3. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Cet ordre est-il total ?

4. On considère le demi-plan complexe $H = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$.
On considère la relation binaire $\preceq$ sur H définie par :

$$\forall (z,z') \in H^2, z \preceq z' \Leftrightarrow (|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}(z'))) .$$

a. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur H.
b. Cet ordre est-il total ?

5. On munit E d'une relation d'ordre $\preceq$. Soient A et B deux parties de E admettant chacune un plus grand élément.

a. On suppose la relation d'ordre $\preceq$ totale. Montrer que $A \cup B$ admet un plus grand élément.
b. Donner un contre-exemple dans le cas où la relation d'ordre $\preceq$ n'est pas supposée totale.
c. Reprendre les questions précédentes avec $A \cap B$ à la place de $A \cup B$.

6. On considère l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) / f(0) = 1$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\}$.
On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E définie par :

$$\forall (f, g) \in E^2, f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leqslant g'(x).$$

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation $\mathcal{R}$ sur E.
b. Cet ordre est-il total ?
c. Montrer que $\forall (f, g) \in E^2, f\mathcal{R}g \Rightarrow f \preceq g$ où $\preceq$ est la relation d'ordre définie au **V)2.**
d. A-t-on $\forall (f, g) \in E^2, f \preceq g \Rightarrow f\mathcal{R}g$ où $\preceq$ est la relation d'ordre définie au **V)2.** ?