TD Suites de fonctions

Roulley Emeric

I) Études pratiques de suites de fonctions

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{n}{1+nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$, sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur l'intervalle $[a, b]$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$avec $a < b$).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \sin(x)\cos^n(x)$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x}{x+n^\alpha}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x^2}{x+n^\alpha}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x\cos(x)}{x+n^\alpha}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x\sin(x)}{x+n^\alpha}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.

6.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.

7.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = xe^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = nxe^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = n\sin(x)e^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = nx\sin(x)e^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer les intervalles de convergence uniforme.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$.
a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa limite simple f.
b. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$?

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x\sin\left(\frac{x}{n}\right)$.
a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite simple f.
b. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?
c. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur le segment $[-a, a]$?
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$?

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \sqrt{n}x^n\ln(x)$ et prolongée continûment en 0.
a. Déterminer le domaine de convergence simple I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite simple f sur I.
b. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur I ?
c. Mêmes questions pour la suite de fonctions $(\sqrt{n}f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x\arctan(nx)$.
a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite simple f.
b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
c. Étudier la concavité de la fonction arctan sur $\mathbb{R}_+$. En déduire l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \arctan(t) \leqslant t$.
d. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?

II) Études théoriques de suites de fonctions

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement vers une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente d'éléments de $[a, b]$, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. (Théorèmes de Dini)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
a. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.
b. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est croissante sur $[a, b]$.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

3.Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions K-lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement vers une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.
a. Montrer que la fonction f est K-lipschitzienne sur $[a, b]$.
b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a. Montrer que la fonction f est convexe.
b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ convergeant uniformément vers une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que f est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On note $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in E$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne (resp. en moyenne quadratique) vers la fonction f sur $[a, b]$ si elle converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$ (resp. $(E, \|\cdot\|_2)$). On considère les quatre assertions :

(1) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[a,b]$.
(2) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.
(3) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers la fonction f sur $[a,b]$.
(4) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers la fonction f sur $[a,b]$.

Établir le diagramme des implications logiques entre ces quatre assertions (chaque implication sera prouvée et chaque non-implication sera justifiée à l'aide d'un contre-exemple).

7. (Théorème d'Ascoli)
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. On dit qu'une partie A de l'espace vectoriel normé complexe $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ est équi-uniformément continue si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $f\in A$ et pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$, $|x-y|\leqslant\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$.
a. Soit A une partie équi-uniformément continue de l'espace vectoriel normé complexe $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$.
i. Montrer que la fonction f est continue sur $[a,b]$.
ii. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.
b. Prouver que les parties compactes de l'espace vectoriel normé complexe $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ sont exactement les parties fermées, bornées et équi-uniformément continues (il s'agit du **théorème d'Ascoli**).

III) Théorème de Weierstrass
Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale B_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x\in[0,1], B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

On se propose de prouver que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $\forall x\in[0,1], r_{kn}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in[0,1]$.
a. Soit $y\in[0,1]$. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.
b. En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}r_{kn}(x)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kr_{kn}(x)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2r_{kn}(x)$.
c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2r_{kn}(x)=nx(1-x)$.
d. Soit $\delta\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n,|\frac{k}{n}-x|>\delta}^{n} r_{kn}(x)\leqslant\frac{1}{4\delta^2 n}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\forall x\in[0,1], B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}r_{kn}(x)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$.
4. Montrer enfin le théorème de Weierstrass : Soit I un segment réel. Soit $g\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction g sur I.
5. Application : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Soit $g\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.
On suppose que tous les moments de la fonction g sont nuls, i.e. $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}, \int_a^b x^n g(x)dx=0$.
Montrer que la fonction g est identiquement nulle sur le segment $[a,b]$.