Correction TD 11 L1 Bio

Roulley Emeric

Exercice 1 :
1. On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1)\ f'(x) + 2f(x) = 1$$

$*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) est :

$$(1')\ f'(x) + 2f(x) = 0$$

L'équation $(1')$ est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = 2$. Une primitive de a est $A(x) = 2x$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(1')$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

$*$ Comme le second membre est un polynôme constant, on cherche une solution particulière f_0 de (1) de la forme $f_0(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) + 2f_0(x) = 1 \\ & \Leftrightarrow & 2\alpha = 1 \\ & \Leftrightarrow & \alpha = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & f_0(x) = \frac{1}{2} \end{array}$$

D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2} + Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

2. On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1)\ f'(x) + f(x) = x^2 - x$$

$*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) est :

$$(1')\ f'(x) + f(x) = 0$$

L'équation $(1')$ est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = 1$. Une primitive de a est $A(x) = x$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(1')$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

$*$ Comme le second membre est un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière f_0 de (1) de la forme $f_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) + f_0(x) = x^2 - x \\ & \Leftrightarrow & 2\alpha x + \beta + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 - x \\ & \Leftrightarrow & \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma) = x^2 - x \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ 2\alpha + \beta & = & -1 \\ \beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & -3 \\ \gamma & = & 3 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & f_0(x) = x^2 - 3x + 3 \end{array}$$

D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto x^2 - 3x + 3 + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 2 :
1. On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1)\ f'(x) + f(x) = e^{-x}$$

$*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) est :

$$(1')\ f'(x) + f(x) = 0$$

L'équation $(1')$ est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = 1$. Une primitive de a est $A(x) = x$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(1')$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

$*$ On applique la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière f_0 de (1) de la forme

$$f_0(x) = C(x)e^{-x}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) + f_0(x) = e^{-x} \\ & \Leftrightarrow & (C(x)e^{-x})' + C(x)e^{-x} = e^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{-x} = e^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x) = 1 \\ & \Leftrightarrow & C(x) = x + Cte \end{array}$$

Une solution particulière de (1) est donc

$$f_0(x) = xe^{-x}.$$

D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto (x + C)e^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

2. On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1)\ f'(x) + f(x) = e^{x}$$

$*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) est :

$$(1')\ f'(x) + f(x) = 0$$

L'équation $(1')$ est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = 1$. Une primitive de a est $A(x) = x$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(1')$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

$*$ On applique la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière f_0 de (1) de la forme

$$f_0(x) = C(x)e^{-x}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) + f_0(x) = e^{x} \\ & \Leftrightarrow & (C(x)e^{-x})' + C(x)e^{-x} = e^{x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{-x} = e^{x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x) = e^{2x} \\ & \Leftrightarrow & C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + Cte \end{array}$$

Une solution particulière de (1) est donc

$$f_0(x) = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{x}.$$

(Dans ce cas précis, on aurait pu le deviner directement).
D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2}e^{x} + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

3. On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1)\ f'(x) - xf(x) = x$$

$*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (1) est :

$$(1')\ f'(x) - xf(x) = 0$$

L'équation $(1')$ est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = -x$. Une primitive de a est $A(x) = -\frac{x^2}{2}$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(1')$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

$*$ On applique la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière f_0 de (1) de la forme

$$f_0(x) = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) - xf_0(x) = x \\ & \Leftrightarrow & (C(x)e^{\frac{x^2}{2}})' - xC(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x \\ & \Leftrightarrow & C'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ & \Leftrightarrow & C(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + Cte \end{array}$$

Une solution particulière de (1) est donc

$$f_0(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = -1.$$

(Dans ce cas précis, on aurait pu le deviner directement).
D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 3 :
On souhaite résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(E)\ f'(x) - f(x) = -4xe^{-x}$$

1. $*$ L'équation différentielle linéaire homogène associée à (E) est :

$$(E')\ f'(x) - f(x) = 0$$

L'équation (E') est de la forme $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ avec $a(x) = -1$. Une primitive de a est $A(x) = -x$. Donc d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E') est

$$\mathcal{S}' = \{x \mapsto Ce^{x}, C \in \mathbb{R}\}$$

$*$ On applique la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière f_0 de (E) de la forme

$$f_0(x) = C(x)e^{x}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (1) & \Leftrightarrow & f_0'(x) - f_0(x) = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & (C(x)e^{x})' - C(x)e^{x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{x} + C(x)e^{x} - C(x)e^{x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x)e^{x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & C'(x) = -4xe^{-2x} \end{array}$$

Pour trouver $C(x)$, on doit donc primitiver $x \mapsto -4xe^{-2x}$. Pour cela, on effectue une intégration par parties dont on rappelle la formule ici

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

On l'applique avec

$$\begin{array}{ll} u(x) = 4x, & u'(x) = 4 \\ v'(x) = -e^{-2x}, & v(x) = \frac{e^{-2x}}{2} \end{array}$$

Donc

$$\int -4xe^{-2x}dx = 2xe^{-2x} - 2\int e^{-2x}dx = 2xe^{-2x} + e^{-2x} = (2x+1)e^{-2x}$$

Une solution particulière de (1) est donc

$$f_0(x) = (2x+1)e^{-2x}e^{x} = (2x+1)e^{-x}.$$

2. On cherche une solution particulière f_0 de (E) de la forme $f_0(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f_0 \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & f_0'(x) - f_0(x) = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & ((\alpha x+\beta)e^{-x})' - (\alpha x+\beta)e^{-x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & \alpha e^{-x} - (\alpha x+\beta)e^{-x} - (\alpha x+\beta)e^{-x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & (-2\alpha x + \alpha - 2\beta)e^{-x} = -4xe^{-x} \\ & \Leftrightarrow & -2\alpha x + \alpha - 2\beta = -4x \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -2\alpha & = & -4 \\ \alpha - 2\beta & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 1 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & f_0(x) = (2x+1)e^{-x} \end{array}$$

3. D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x\mapsto (2x+1)e^{-x} + Ce^{x}, C\in\mathbb{R}\right\}}$$

4. Soit $f\in\mathcal{S}$ une solution de (E).
D'après la question précédente, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + Ce^{x}$.
Alors

$$\begin{array}{rcl} f(0) = 1 & \Leftrightarrow & (2\times 0+1)e^{-0} + Ce^{0} = 1 \\ & \Leftrightarrow & 1 + C = 1 \\ & \Leftrightarrow & C = 0 \\ & \Leftrightarrow & \boxed{f(x) = (2x+1)e^{-x} = f_0(x)} \end{array}$$

Par croissances comparées, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^{-x} = 0}$$

5. $*$ Soit $f\in\mathcal{S}$ une solution de (E).
D'après la question précédente, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = (2x+1)e^{-x} + Ce^{x}$.
On suppose que $C\neq 0$. Alors par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
Donc f_0 est l'unique solution de (E) (obtenue pour $C=0$) tendant vers 0 en $+\infty$.
Ceci justifie le "la solution tendant vers 0 en $+\infty$ de l'énoncé.
$*$ Étudions la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f_0(x) = (2x+1)e^{-x}$.
Par opérations usuelles, la fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}, f_0'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (1-2x)e^{-x}.$$

Comme $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x} > 0$, alors f_0' est de même signe que $x\mapsto(1-2x)$ qui est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en $x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
f_0	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

Par un calcul direct, on a : $f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}$.
De plus, par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x} = -\infty$.