Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Leçons : 150, 181, 203, 206, *101, 106, 208*

[Ale], problème III.III.A.1

Théorème

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit K un convexe compact non-vide de V.
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ vérifiant : $\forall u \in G, u(K) \subset K$.
Alors $\exists x \in K, \forall u \in G, u(x) = x$.

Démonstration :

Étape 1 : Soit N une norme euclidienne sur V.
Pour tout $x \in V$, on pose
$$\nu(x) = \max_{u \in G} N(u(x)).$$
On va montrer que ν définit une norme G-invariante sur V.
Comme G est compact : pour tout $x \in V$, $\{u(x) | u \in G\}$ est compact.
On en déduit que ν est bien définie sur V.
Par ailleurs, on a : $\forall x \in V, \forall u \in G, \nu(x) = \nu(u(x))$, car la composition par u est une bijection du groupe G.
De plus :
- ν est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car N l'est ;
- $\forall x \in V, \nu(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x)$ car les éléments de G sont linéaires et car N est une norme.

Il nous reste à montrer que ν vérifie l'inégalité triangulaire ; soient $x, y \in V$.
$\nu(x+y)$ étant définie à partir d'un maximum, on a :
$$\exists u_0 \in G, \nu(x+y) = N\left(u_0(x+y)\right).$$
Alors $\nu(x+y) \leqslant N\left(u_0(x)\right) + N\left(u_0(y)\right) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$.
Et si on a l'égalité $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$, alors $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés, donc x et y aussi (car u_0 est inversible).

Étape 2 : Comme ν est continue sur K, elle y admet un minimum, disons en $a \in K$.
Soit $u \in G$, par argument d'invariance, on a : $\nu(u(a)) = \nu(a)$.
Comme ν est convexe (c'est une norme !), ses ensembles de niveau sont convexes, et donc, on obtient : $\nu\left(\dfrac{u(a)+a}{2}\right) = \nu(a)$.
Ainsi, $\nu(u(a)+a) = 2\nu(a) = \nu(a) + \nu(u(a))$.
Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour ν fournit : $u(a) = \lambda a$, pour un certain $\lambda > 0$.
Mais $\nu(u(a)) = \nu(a)$, donc $\lambda = 1$ ou $a = u(a) = 0$.
Finalement, $\forall u \in G, u(a) = a$. ∎

Corollaire

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$.[1]

Démonstration :
On munit G d'une nouvelle structure de groupe $(G, \Diamond)$ par : $\forall A, B \in G, A \Diamond B := BA$.
On pose :
$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} (G, \Diamond) & \to & \mathrm{GL}\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) \\ A & \mapsto & (S \mapsto {}^{\mathrm{t}}ASA) \end{array} \right. .$$

- ρ est bien définie car $\forall A \in G, \rho(A) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right)$ est inversible, d'inverse $\rho\left(A^{-1}\right)$;
- ρ est un morphisme de groupes (pour la loi $\Diamond$) ;

1. Ce résultat peut-être démontré de façon différente en utilisant l'ellipsoïde de John-Loewner (voir en page **??**).

– ρ est continue, car $\rho = (b \circ \Delta)|_G$, où $b : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ (A, B) & \mapsto & (S \mapsto {}^tASB) \end{array} \right.$ est continue (par bilinéarité et dimension finie) et $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ A & \mapsto & (A, A) \end{array} \right.$ est continue (par linéarité et dimension finie).

$\rho(G)$ est un sous-groupe (car ρ est un morphisme de groupes et G un groupe) compact (car ρ est continue et G compact) de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
On pose $H = \{{}^tMM | M \in G\}$ et K l'enveloppe convexe de H.
La compacité de G implique celle de H puis celle de K. [2]
De plus, comme $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on obtient $H \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; et comme $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, on a $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Enfin,
$$\forall A \in G, \forall M \in G, \rho(A)\left({}^tMM\right) = {}^tA{}^tMMA = {}^t(MA)(MA) \in H \subset K ;$$
et donc par linéarité de $\rho(A)$, K est stable par $\rho(A)$.
On applique le résultat précédent pour obtenir :
$$\exists S \in K, \forall A \in G, S = \rho(A)(S) = {}^tASA.$$
Et comme $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a bien $G \subset O(q_S)$, où $q_S : x \mapsto {}^txSx$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. ■

Références

[Ale] M. ALESSANDRI – *Thèmes de géométrie, Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

2. On dispose du lemme suivant, conséquence du théorème de Carathéodory :

Lemme

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension $n < \infty$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, on suppose que $\mathcal{A} \neq \varnothing$ et que $\mathcal{A}$ est compact.
Alors son enveloppe convexe $\mathrm{Cv}(\mathcal{A})$ est compacte.

En effet, on pose $K = \left\{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} | t_1 + \ldots + t_{n+1} = 1\right\}$, c'est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On définit $f : \left| \begin{array}{ccc} K \times \mathcal{E}^{n+1} & \to & \mathcal{E} \\ (t_1, \ldots, t_{n+1}, A_1, \ldots, A_{n+1}) & \mapsto & t_1A_1 + \ldots + t_{n+1}A_{n+1} \end{array} \right.$.
D'après Carathéodory, $f\left(K \times \mathcal{A}^{n+1}\right) = \mathrm{Cv}(\mathcal{A})$; or f est continue et $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est compact donc $\mathrm{Cv}(\mathcal{A})$ l'est aussi.