MÉMOIRE DE MASTER 2, PRÉPARATION À L'AGRÉGATION

Leçon 247. Exemples de problèmes d'interversions de limites

Julien BERNIS, en binôme avec Erwan PIN,

encadrés par Bachir BEKKA.

Rennes 1 ENS Rennes

LEÇON 247. EXEMPLES DE PROBLÈMES D'INTERVERSIONS DE LIMITES.

JULIEN BERNIS

Table des matières

Date: 9 décembre 2016.

I. Présentation détaillée du plan.

I.1. *Plan.*

Partie 0. Préliminaires.

Contre-exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. On a :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

Contre-exemple 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$. On a la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction nulle, cependant :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

L'interversion des limites nécessite des hypothèses précises. Sinon on se retrouve face à des calculs dont les résultats sont incohérents, ou des suites d'objets réguliers dont la régularité est perdue à la limite.

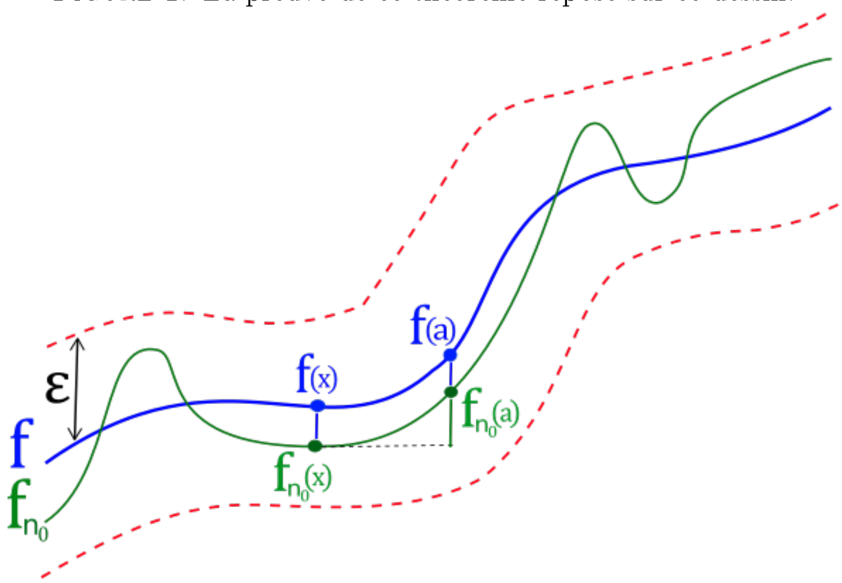
Partie 1. Régularité des suites et des séries de fonctions.

Remarque 3. La continuité et la dérivabilité sont des notions locales définies comme des limites, ce qui correspond parfaitement au cadre de la leçon.

A-Continuité.

Théorème 4. Soient X un espace métrique, E un espace métrique, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $A \subset X$ dans E telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f. Alors f est continue sur A.

Figure 1. La preuve de ce théorème repose sur ce dessin.



Exemple 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \left(1 - \frac{\cdot}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$. On a alors convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l'application $\exp(-\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

Contre-exemple 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue et converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ qui n'est pas continue. La convergence n'est ici pas uniforme.

Théorème 5. (Double limite) Soient X un espace topologique, E un espace métrique complet, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $A \subset X$ dans E. Soit $a \in \bar{A}$, on suppose que :
— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f,
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$.
Alors $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a,\, x\in A} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} l_n.$$

Exemple 5. Soit E un espace de Banach, et $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{Id} + \frac{u}{n}\right)^n = \exp(u).$$

Contre-exemple 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle. On constate que pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$ mais on a :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Contre-exemple 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément, cependant on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to0} f_n(x) = \lim_{x\to0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

La continuité uniforme est une hypothèse suffisante mais pas nécessaire.

B-Dérivabilité.

Théorème 6. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, F un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I,F)$. On suppose que :
— il existe $x_0 \in I$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
— la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.
Alors il existe $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et telle que $f' = g$.

Application 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Alors, sans faire appel à l'intégration, on peut montre que f admet une primitive, en l'approchant uniformément par des fonctions affines par morceaux.

Contre-exemple 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et converge uniformément vers $|\cdot|$, fonction qui n'est pas dérivable en 0.

Contre-exemple 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{sin(n^2x)}{n}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et converge uniformément vers la fonction nulle, mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(0) = n$ qui tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$.

Ces deux contre-exemples montrent que la seule convergence simple d'une fonction, même très régulière, ne suffit pas à conclure sur la dérivabilité de sa limite.

Théorème 7. Soit E, F deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications différentiables sur U. On suppose qu'il existe une application $f : U \to F$ et L une application de U dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ telles que :
— $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur U,
— $\mathrm{D}f_n$ converge uniformément vers L sur U.
Alors f est différentiable sur U et on a :

$$\mathrm{D}f = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{D}f_n.$$

En outre, si pour tout $n \geq 0$, $f_n \in \mathcal{C}^1(U,F)$, alors $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$.

Application 7. L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout M, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathrm{D}_M\exp.H = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(M^{p-1}H + M^{p-2}HM + \cdots MHM^{p-2} + HM^{p-1}\right).$$

Théorème 8. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de Ω, c'est-à-dire converge vers f pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(p)}$ converge vers $f^{(p)}$ pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Exemple 8. Soit $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z \in \Omega$, on pose $f_n(z) = z^{\frac{1}{n}}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante égale à 1 pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$.

C-Séries de fonctions.

Remarque 9. Les théorèmes de régularité pour les limites de suites de fonctions sont applicables pour les sommes de séries de fonctions en utilisant les théorèmes précédents sur la suite des sommes partielles.

Application 9. La fonction $\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Application 9. (Équation de la chaleur sur un segment) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Notons K_f l'ensemble des éléments $(x,t) \mapsto u(x,t)$ de $\mathcal{C}^0([0,\pi]\times\mathbb{R}_+)$ tels que :

(1) — $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
— $\partial^2_{x^2}u$ existe et est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
— $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,
— $\forall (x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, $\partial^2_{x^2}u(x,t) = \partial_t u(x,t)$. (C)

(2) $\forall x \in [0,\pi]$, $u(x,0) = f(x)$

Alors K_f est un singleton.

Proposition 10. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on a :
— $t \in]-R,R[\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$,

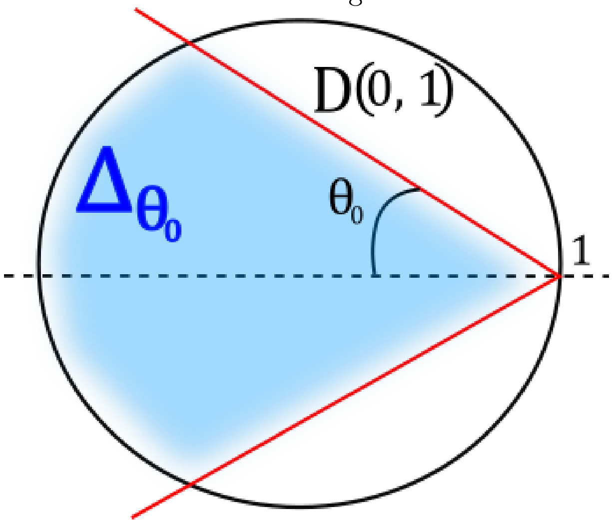
— $z \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $\mathcal{D}(0,R)$.

Théorème 11. (Abel angulaire) Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme notée f. Soit $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$, et posons alors :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \exists \rho \in \mathbb{R}_+^* |z| < 1, z = 1 - \rho \exp(i\theta) \right\}.$$

Alors si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{z \to 1,\, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

FIGURE 2. Domaine angulaire considéré.



Application 11. On a $\ln(2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Théorème 11. (Taubérien faible) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note f sa somme sur $\mathrm{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$.
Alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

PARTIE 2. FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Théorème 13. Soient X et Y deux espaces topologiques, E un espace métrique complet, $A \subset X$, $B \subset Y$, et $(a,b) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Soit $f : A \times B \to E$. On suppose qu'il existe $g : A \to E$ et $h : B \to E$ telles que :

— $f(\cdot, y)$ converge uniformément vers g sur A lorsque y tend vers b,
— $f(x, \cdot)$ converge simplement vers h sur B lorsque x tend vers a.

Alors f possède une limite en (a,b), g possède une limite en a, h possède une limite en b. De plus on a :

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{y \to b} h(x).$$

Application 13. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue. On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \int\limits_0^y \varphi(x,t) \mathrm{d}t$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Contre-exemple 13. On définit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. On a bien $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, cependant f n'a pas de limite en (0,0) car $\frac{1}{2} = f(x,x) = f(x,-x) = -\frac{1}{2}$.

Théorème 14. (Schwarz) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et soit $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ deux fois différentiable en a alors on a :

$$\partial^2_{xy} f(a) = \partial^2_{yx} f(a).$$

Application 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Alors on a :

$$\partial^2_{yx} f(0,0) = -1 \neq 1 = \partial^2_{xy} f(0,0),$$

donc f n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$.

Partie 3. Limites et intégration.

Remarque. On se place sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On va se concentrer sur des intégrales à domaines non bornées pour mieux correspondre au cadre de la leçon.

A-Interversion limite-intégral.

Théorème 16 (convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{L}^p(\mu)$ vérifiant :
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ-presque partout,
- Il existe $g \in \mathbb{L}^p(\mu)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, μ-presque partout.

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathbb{L}^p(\mu)$ et on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Application 16. On a la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\exp(-nx^3)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

Application 16. On a la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x.$$

On déduit de cette formule que la valeur de l'intégrale de Gauss est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 17. (Beppo Levi) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable positive et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Application 17. Soit f une fonction mesurable positive alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int (f \wedge n)(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Proposition 18. (Continuité de la transformée de Laplace en 0) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-xt)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Application 18. Cette proposition nous permet de calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

B-Interversion des sommations.

Théorème 19. (Fubini et Fubini-Tonelli) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés avec μ et ν mesures σ-finies. Alors on a les deux théorèmes suivants :

(1) (Fubini-Tonelli) Soit $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors on a :

$$\int_{X\times Y}\int f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

(2) (Fubini) Soit $f \in \mathbb{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. Alors on a :

— Les applications $x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables,

— On peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\int_{X\times Y}\int f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Application 19. Le théorème de Fubini-Tonelli nous donne une deuxième méthode pour calculer l'intégralle de Gauss.

Application 19. On a les relations suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\exp(-x)}{1+\exp(-x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

$$\sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \sum_{q\geq 2}\sum_{p\geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \frac{1}{2}.$$

Application 19. Soit X une variable aléatoire positive définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors on a :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\mathrm{d}t.$$

Contre-exemple 19. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on définit $u_{n,p}$ par : $u_{n,p} = 0$ si $n > p$, $u_{n,p} = 1$ si $n = p$ et $u_{n,p} = \frac{-1}{2^{p-n}}$ si $n < p$. Alors on a :

$$0 = \sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 0} u_{n,p} \neq \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} u_{n,p} = 2.$$

Contre-exemple 19. On a l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-(n+1)x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \exp(-(n+1)x)\mathrm{d}x = \ln(2).$$

Cependant on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-(n+1)x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

Ce contre-exemple montre que les conditions d'interversions exigées par Fubini sont seulement suffisantes.

Proposition 20. (Produit de Cauchy) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries absolument convergentes dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$, et de plus on a la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Application 20. Soient x et y dans $\mathbb{C}$. Alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right),$$

d'où $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$.

Contre-exemple 20. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k(n-k)}}$ ne converge pas.

I.2. *Défense du plan.*

De très nombreux objets et notions mathématiques sont définis comme des limites : fonctions, séries, intégrales, continuité, dérivabilité... Il n'est donc pas rare de considérer des objets qui dépendent de deux paramètres, que l'on peut faire tendre dans un sens ou dans l'autre. Comme le montrent les contre-exemples 1 et 2, dans la plupart des cas, cette interversion de limites n'est pas possible, et nécessite des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses servent essentiellement à garantir la **cohérence des calculs**, ou à **préserver la régularité à la limite**.

Ainsi, la première partie de ce plan est consacrée aux suites et séries de fonctions, dont on cherche à préserver la régularité à la limite. La deuxième partie se focalise quant à elles sur les fonctions de deux variables. Enfin dans la troisième partie, nous nous intéressons aux interversions de limites et d'intégrales, et à l'échange des sens de sommation.

Dans la première sous-partie, nous nous intéressons tout d'abord à la continuité de la limite d'une suite de fonctions. Le théorème 4, dont la preuve est illustrée par la figure 1, est fondamental : il assure que la limite uniforme de fonctions continues est continue. Nous l'illustrons par l'exemple 4, tandis que le contre-exemple 4, très classique, nous montre que retirer l'hypothèse de convergence uniforme est impossible. Le théorème 5, dit de la double-limite, est lui aussi fondamental. Il est très similaire au théorème précédent, mais l'hypothèse de continuité de la suite de fonctions est remplacée par la complétude de l'espace de départ, ce qui aboutit à un résultat de convergence et d'interversion de limites. Nous illustrons ce théorème en donnant une expression de l'exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé complet en terme d'une limite de suites d'endomorphismes. L'absence de convergence uniforme permet de fournir le premier contre-exemple 5, tandis que le deuxième contre-exemple 5 démontre que cette hypothèse est suffisante, mais non nécessaire.

Dans la deuxième sous-partie, nous nous intéressons à la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions. Dans les contre-exemples 6, nous constatons que la convergence uniforme d'une suite de fonctions, même extrêmement régulière, ne suffit en aucun cas à garantir la dérivabilité de la fonction à la limite. Le théorème 6, très important, nous montre que la convergence uniforme de la suite des dérivées d'une suite d'applications $\mathcal{C}^1$ (et la convergence ponctuelle en un point), suffisent à garantir le caractère $\mathcal{C}^1$ de la limite. On peut bien entendu itérer ce résultat pour obtenir des régularités d'ordre supérieur. On généralise le théorème 6 dans le cadre du calcul différentiel avec le théorème 7 (différentielle de la limite) pour une suite d'applications différentiables entre deux Banachs, que l'on illustre par le calcul de la différentielle de l'application exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le cas des fonctions holomorphes est à la fois spécifique et remarquable, car comme l'annonce le théorème 8, la convergence d'une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω, pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$, implique l'holomorphie de la fonction limite ainsi que la convergence des suites de toutes les dérivées vers les dérivées de la fonction limite.

La dernière sous-partie traite plus spécifiquement des sommes de séries de fonctions. Les théorèmes précédents s'appliquent en effet à la suite des sommes partielles, ce qui permet de conclure à la continuité, la dérivabilité ou l'holomorphie des sommes de séries de fonctions. Ainsi l'exemple 9 montre que la fonction ζ, qui est définie comme une série, est holomorphe sur l'ensemble des complexes de parties réelles strictement plus grandes que 1. La résolution de l'équation de la chaleur sur un segment est également une très belle application de ces théorèmes, qui a également une valeur historique certaine, puisqu'elle a motivé l'invention par Fourier des séries portant son nom. La proposition 10, qui est aussi conséquence des ces théorèmes, permet de conclure au caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière restreinte à son segment ouvert de convergence, et au caractère holomorphe de la somme sur le disque ouvert de convergence. Le théorème 11 (théorème d'Abel angulaire) est un résultat d'interversion des limites au bord du disque de convergence d'une série entière. Une application de ce théorème au produit de Cauchy a fait l'objet d'un exercice le jour de la leçon. Le théorème 12 (taubérien faible), constitue quant à lui une réciproque partielle du théorème d'Abel.

La deuxième partie de notre plan est consacrée aux fonctions de deux variables. Le théorème 13 donne une condition nécessaire pour qu'une fonction de deux variables qui converge selon chaque variable en un point ait une limite en ce point : la convergence uniforme selon au moins une des deux variables. Nous illustrons avec le contre-exemple 13 la mise en défaut de ce théorème sans la convergence uniforme. Enfin nous donnons le théorème 14 (Schwarz), qui est l'un des résultats les plus importants en calcul différentiel. Il affirme qu'une fonction deux fois différentiable en un point d'un ouvert admet des dérivées partielles croisées égales en ce point. On applique bien souvent ce théorème lors de calculs sans même y penser. L'application 14 utilise plutôt la contraposée du théorème pour montrer qu'une fonction n'est pas deux fois différentiable.

La troisième et dernière partie de notre plan concerne l'intégration et l'inversion du sens sommation. Nous avons fait le choix, dans un souci d'économie d'espace, de ne pas parler de la régularité des intégrales à paramètre, bien que celles-ci aient parfaitement leur place dans la leçon. Ce choix est également justifié par un souci d'équilibre : si nous les avions ajoutées, la partie du plan concernant la régularité aurait été trop prépondérante.

La première sous-partie concerne l'interversion d'une limite et d'une intégrale. Les deux théorèmes phares pour ce problème sont le théorème de convergence dominée (théorème 16), et le théorème de Beppo-Lévi (théorème 17). Nous donnons deux applications du théorème de convergence dominée, dont une formule qui permet le calcul de l'intégrale de Gauss. L'application 17 est très utile en probabilité, notamment lorsqu'on l'applique à des temps d'arrêts *a priori* non bornés lors de l'études de martingales. Nous terminons avec un théorème sur la continuité en 0 de la transformée de Laplace (proposition 18) d'une fonction continue dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge, puis nous l'appliquons au calcul de l'intégrale du sinus cardinal (application 18).

La deuxième sous-partie repose à elle-seule sur les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini (théorème 19). Le premier légitime les interversions de sommations sous la seule hypothèse de mesurabilité et de positivité, tandis que le deuxième requiert l'intégrabilité par rapport à la mesure produit. En pratique on utilise tour à tour ces deux théorèmes, le premier pour montrer l'intégrabilité, et le deuxième pour mener à bien les calculs. Les applications 19 illustrent les utilisations de ces deux théorèmes : calcul d'intégrale par interversion du signe intégral et du symbole somme, deuxième méthode de calcul de l'intégrale de Gauss par multiplication des intégrales, interversion et calcul d'une somme d'une suite dépendant de deux indices, ainsi qu'une expression élégante de l'espérance d'une variable aléatoire positive en fonction de l'intégrale de sa fonction de répartition. Le premier contre-exemple 19 illustre le fait que la non intégrabilité peut mettre en défaut le théorème de Fubini dans le cas non positif, tandis que le deuxième montre une interversion possible sans que les conditions exigées par le théorème de Fubini ne soient remplies. Elles sont suffisantes mais pas nécessaires. La proposition 20 sur le produit de Cauchy est une autre application du théorème de Fubini, qui donne l'absolue convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Nous appliquons cette proposition à la démonstration de la formule de morphisme réalisée par l'exponentielle complexe (application 20), puis nous donnons le contre-exemple 20 qui montre, à l'aide de séries alternées, que le manque d'absolue convergence peut provoquer la divergence du produit de Cauchy.

II. Développements

II.1. *Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.*

Théorème. (Abel angulaire) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme notée f. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et posons alors :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \exists \rho \in \mathbb{R}_+^* |z| < 1, z = 1 - \rho \exp(i\theta) \right\}.$$

Alors si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{z \to 1,\, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, le reste d'ordre n de la série des a_n. En vue d'effectuer une transformation d'Abel, constatons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = R_{n-1} - R_n$, (en prenant soin d'utiliser la convention $R_{-1} = S$). Alors on a pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$\begin{aligned} f(z) - S &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n)(z_n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - z^n) \\ &= (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $|R_n| < \varepsilon$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, et tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$, a-t-on :

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z-1| \left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n z^n\right| + \varepsilon|z-1| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |z|^n \\ &\leq |z-1|\sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}. \end{aligned}$$

Par continuité de $z : z \mapsto z$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, tel que, pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$ vérifiant $|z-1| < \alpha$, on a : $|z-1|\sum_{n=0}^{n_0} |R_n| < \varepsilon$.

Soit $z \in \mathcal{D}(0,1)$ tel que $|z-1| < \alpha$. Pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Supposons de plus $z \in \Delta_{\theta_0}$. Alors par définition de Δ_{θ_0}, il existe $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, tel que $z = 1 - \rho\exp(i\theta)$.
On a alors $|z|^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)$, donc on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho}.$$

Si en outre, on a $\rho \in]0, \cos(\theta_0)[$, ce qui est possible car $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, on a alors :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

Au final, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right). \qquad \square$$

Théorème. (Taubérien faible) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note f sa somme sur $\mathrm{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, posons $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.
Pour tout $x \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leq n(1-x)$.
De plus, d'après le théorème sur le comportement des sommes partielles d'une série divergente à terme général positif, il existe $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, avec $\lim\limits_{N\to+\infty} \varepsilon(N) = 0$ tel que : $\sum_{n=0}^{N} n|a_n| = \varepsilon(N)N$.
On a donc :

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}|a_n|x^n \leq (1-x)\varepsilon(N)N + \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left|S_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leq \varepsilon(N) + \sup_{n>N}(n|a_n|).$$

Donc $S_N - f(1-\frac{1}{N})$ tend vers 0 quand N vers $+\infty$, et comme $f(1-\frac{1}{N})$ tend vers S, on a :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} S_N = S.}$$

Remarque : Cette démonstration, issue de Combes (1982), est moins répandue et sensiblement plus courte que celle trouvée dans Gourdon (1994).

II.2. *Différentielle de la limite et application.*

Théorème. Soit E, F deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications différentiables sur U. On suppose qu'il existe une application $f : U \to F$ et L une application de U dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ telles que :
— $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur U,
— $\mathrm{D}f_n$ converge uniformément vers L sur U.

Alors f est différentiable sur U et on a :

$$\mathrm{D}f = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{D}f_n.$$

En outre, si pour tout $n \geq 0$, $f_n \in \mathcal{C}^1(U,F)$, alors $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèses, il existe un entier $N_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_0$ et pour tout $x \in U$ on ait :

$$||\mathrm{D}_x f_n - L(x)||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire (ou directement par le critère de Cauchy uniforme), pour tout $n \geq N_0$ et pour tout $x \in U$ on a :

$$||\mathrm{D}_x f_n - \mathrm{D}_x f_{N_0}||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq 2\varepsilon.$$

Soit $a \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r)$ soit un convexe inclus dans U. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f_n - f_{N_0}$, pour tout $n \geq N_0$ et pour tout $h \in E$ tel que $||h||_E < r$ on a :

$$||f_n(a+h) - f_{N_0}(a+h) - (f_n(a) - f_{N_0}(a))\,||_F \leq 2\varepsilon||h||_E. \quad (2)$$

Par ailleurs, f_{N_0} est différentiable en a, donc il existe $0 < \alpha < r$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $||h||_E < \alpha$ on ait :

$$||f_{N_0}(a+h) - f_{N_0}(a) - \mathrm{D}_a f_{N_0}.h||_F \leq \varepsilon||h||. \quad (3)$$

Au final, pour tout $n \geq N_0$ et pour tout $h \in E$ tel que $||h||_E < \alpha$ on a :

$$\begin{aligned}
&||f_n(a+h) - f_n(a) - L(a).h|| \\
&\quad\leq \quad \underbrace{||f_n(a+h) - f_{N_0}(a+h) - (f_n(a) - f_{N_0}(a))\,||_F}_{(2)} \\
&\quad\quad + \quad \underbrace{||f_{N_0}(a+h) - f_{N_0}(a) - \mathrm{D}_a f_{N_0}.h||_F}_{(3)} \\
&\quad\quad + \quad \underbrace{||\mathrm{D}_a f_n.h - L(a).h||_F}_{(1)+\text{ définition de } ||\cdot||_{\mathcal{L}_c(E,F)}} \\
&\quad\leq \quad 4\varepsilon||h||_E.
\end{aligned}$$

On laisse alors tendre n vers $+\infty$ et on a :

$$\boxed{||f(a+h) - f(a) - L(a).h||_F \leq 4\varepsilon||h||_E\,,}$$

ce qui, puisque $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$, montre que f est différentiable en a et que $\mathrm{D}_a f = L(a)$. Donc f est différentiable sur U et $\mathrm{D}f = L$.

Si pour tout $n \geq 0$, $f_n \in \mathcal{C}^1(U,F)$, alors pour tout $n \geq 0$, les $\mathrm{D}f_n$ sont continues sur U, et D_f est alors continue comme limite uniforme d'applications continues. Donc $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$. □

Application. L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on peut donner une expression de sa différentielle.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $u_p : M \mapsto \frac{1}{p!}M^p$. Pour tout $p \geq 1$, u_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

$$D_M u_p.H = \frac{1}{p!}\left(M^{p-1}H + M^{p-2}HM + \cdots MHM^{p-2} + HM^{p-1}\right).$$

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $M \in \mathrm{B}(0,R)$, et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

$$||\mathrm{D}_M u_p.H|| \leq \frac{1}{(p-1)!}||M||^{p-1}||H||,$$

($||\cdot||$ est bien entendu, une norme d'algèbre) donc on a :

$$|||\mathrm{D}_M u_p||| \leq \frac{1}{(p-1)!}R^{p-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum_{n\geq 0}\mathrm{D}u_p$ converge normalement sur toute boule de $\mathcal{L}_c\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ complet, donc converge uniformément sur toute boule de $\mathcal{L}_c\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$.

Posons pour tout $n \geq 1$, $f_n : M \mapsto \sum\limits_{p=0}^{n} u_p(M)$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers exp sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc d'après le théorème et ce qui précède, la restriction de exp à toute boule de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$ donc exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a pour tout M, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{D_M\mathrm{exp}.H = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(M^{p-1}H + M^{p-2}HM + \cdots MHM^{p-2} + HM^{p-1}\right).}$$

II.3. *Équation de la chaleur sur une barre conductrice.*

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Notons K_f le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0\left([0,\pi]\times\mathbb{R}_+\right)$ dont les éléments $u(x,t)$ vérifient :

(1) — $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
— $\partial^2_{x^2}u$ existe et est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
— $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,
— $\forall (x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, $\partial^2_{x^2}u(x,t) = \partial_t u(x,t)$. (C)

(2) $\forall x \in [0,\pi]$, $u(x,0) = f(x)$

Alors K_f est un singleton. (Il existe une unique solution à l'équation de la chaleur que nous allons déterminer).

Remarque. Cette équation modélise par exemple l'évolution de la température le long d'une barre conductrice de longueur π (barre qui n'est certes pas facile à usiner, mais on peut toujours choisir des unités sympathiques pour se ramener à une telle longueur), dont on maintient les extrémités à une température nulle. La répartition initiale de la chaleur est prescrite par la fonction f. On va résoudre l'équation par une méthode de séparation des variables.

Existence. Soit u une solution non identiquement nulle de (1), sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ où $X \in \mathcal{C}^2\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$ et $T \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\right)$. Comme $u \neq 0$, il existe $(x_0,t_0) \in]0,\pi[\times\mathbb{R}_+$, tel que

$u(x_0, t_0) \neq 0$, c'est-à-dire $X(x_0) \neq 0$ et $T(t_0) \neq 0$. Comme u vérifie (C) on a, par dérivation :

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t).$$

En particularisant les variables, pour tout $x \in [0, \pi]$, $X''(x) = \frac{T'(t_0)}{T(t_0)} X(x)$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $T'(t) = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t)$.
Donc en posant $k = -\frac{T'(t_0)}{T(t_0)} = -\frac{X''(x_0)}{X(x_0)}$, on a finalement :

$$X''(x) = -kX(x) \text{ et } T'(t) = -kT(t).$$

• Supposons que $k < 0$. Alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que :

$$X(x) = A \exp(\sqrt{-k}x) + B \exp(-\sqrt{-k}x).$$

D'après les conditions aux bords en $x = 0$ et $x = \pi$, (A, B) est dans le noyau de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp\left(\sqrt{-k}\pi\right) & \exp\left(-\sqrt{-k}\pi\right) \end{bmatrix},$$

matrice inversible. C'est absurde donc $k \geq 0$.

• Supposons $k = 0$. Alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que $X(x) = Ax + B$. Cette fonction a au plus un zéro et ne peut pas remplir les conditions aux bords. Donc $k > 0$.

• Donc $k > 0$ et il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que que $X(x) = A \cos(\sqrt{k}x) + B \sin(\sqrt{k}x)$. D'après les conditions aux bords, on a : $A = 0$ et $\sin(\sqrt{k}\pi) = 0$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(x) = B \sin(nx)$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

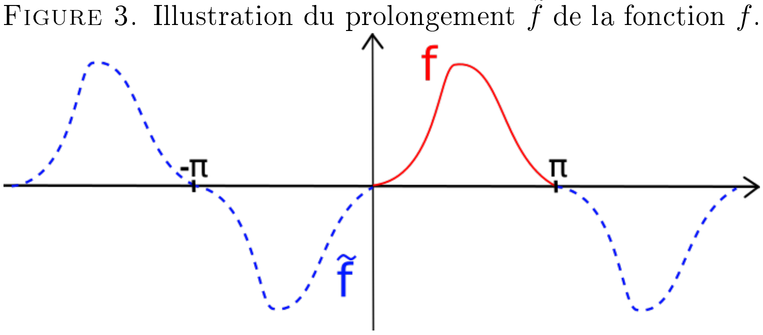
$$u(x, t) = C \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction est bien solution de (1). Désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous noterons :

$$u_n(x, t) = \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

On prolonge f à $[-\pi, \pi]$ par imparité puis à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Notons $\tilde{f}$ ce prolongement de f. Comme $f(0) = f(\pi)$, $\tilde{f}$ est continue et $\mathcal{C}^1$ (par morceaux).

FIGURE 3. Illustration du prolongement $\tilde{f}$ de la fonction f.



Remarque. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite de complexes. On pourrait démontrer que si $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n u_n$ est solution de (1) et (2) tout en convergeant normalement vers f sur $[0, \pi]$ en $t = 0$, alors les B_n

ne peuvent être que les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$. On occulte ici cette étape supplémentaire d'analyse, mais il est toujours bon de savoir qu'on ne fait rien par hasard.

• Comme $\tilde{f}$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ses coefficients de Fourier sont sommables.
Or pour tout $n \geq 1$, $\left|b_n\left(\tilde{f}\right)u_n(x,t)\right| \leq \left|b_n\left(\tilde{f}\right)\right|$. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} b_n\left(\tilde{f}\right)u_n$ converge (normalement donc) simplement sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+$. Notons S sa somme. La majoration précédente assure la convergence normale (donc uniforme) de la série, et la continuité des u_n nous assure donc la continuité de S sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+$.

• Comme la série converge simplement, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a $S(0,t)=S(\pi,t)=0$.

• Traitons rigoureusement une seule des dérivées partielles dont nous avons besoin, les autres s'en déduisent par analogie :
Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[0,\pi]$ et tout $t\in[\varepsilon,+\infty]$, on a :

$$\left|\partial_t\left(b_n\left(\tilde{f}\right)u_n\right)(x,t)\right| \leq \left|b_n\left(\tilde{f}\right)\right| n^2\exp\left(-n^2\varepsilon\right).$$

On a majoré **indépendamment de** t par une suite qui est un $\mathrm{O}\left(\left|b_n(\tilde{f})\right|\right)$. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} b_n\left(\tilde{f}\right)\partial_t u_n(x,\cdot)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x\in[0,\pi]$. Donc S est partiellement dérivable selon t sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, et on peut dériver S terme à terme.
En outre, les $b_n(\tilde{f})\partial_t u_n$ sont des fonctions continues en les deux variables sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$. La majoration précendente est également **uniforme en** x **et en** t, ce qui assure la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} b_n\left(\tilde{f}\right)\partial_t u_n$ sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$. Donc $\partial_t S$ est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$.
Comme on peut bien dériver S terme à terme, et comme u_n est solution de (C) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S est également solution de (C), donc de (1).

• Pour tout $x\in[0,\pi]$, $S(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n\left(\tilde{f}\right)\sin(nx)$ est la série de Fourier de $\tilde{f}$. Comme $\tilde{f}$ et continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de convergence normale de Dirichlet assure que pour tout $x\in[0,\pi]$, $S(x,0)=f(x)$. C'est-à-dire que S vérifie (2).

Au final, S est bien une solution de (1) et (2), c'est-à-dire $S\in K_f$.

Unicité. Remarquons que par linéarité de l'équation :

Si u_1 et u_2 sont dans K_f alors u_1-u_2 est dans K_0.

Soit $u\in K_0$. On définit H sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$H(t)=\int_0^\pi u^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

Comme u vérifie (1), H est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t>0$, on a :

$$H'(t)=\int_0^\pi 2\partial_t u(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x \underbrace{=}_{(C)} \int_0^\pi 2\partial_{x^2}u(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{IPP}} -2\int_0^\pi\left(\partial_x u(x,t)\right)^2\mathrm{d}x \leq 0.$$

Donc H est décroissante, positive, avec $H(0)=0$ et H est continue en 0. Donc H est identiquement nulle, et comme u est continue, u est identiquement nulle. $\square$

III. Questions et exercices.

III.1. *Question 1 (sur la différentielle de l'exponentielle)*

Peut-on trouver une expression plus élégante de la différentielle de l'exponentielle en une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Oui ! Posons $\mathrm{ad}M \in \mathcal{L}_c(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{ad}M(H) = MH - HM$, et considérons la série :

$$\exp(M)^{-1} \sum_{p=1}^{+\infty} \mathrm{D}_M u_p.H = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!}(-M)^q \mathrm{D}_M u_p.H.$$

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p+q=k}^{+\infty} \frac{1}{q!}(-M)^q \mathrm{D}_M u_p.H = \frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}M)^{k-1}(H).$$

D'où la nouvelle expression de la différentielle :

$$D_M \exp.H = \exp(M) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}(-\mathrm{ad}M)^{k-1}(H) \right).$$

III.2. *Question 2 (sur l'équation de la chaleur)*

Pourquoi suppose-t-on que $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ et pas seulement dans $\mathcal{C}^1(]0,\pi[)$ dans l'équation de la chaleur ?

On suppose une telle régularité pour que le prolongement $\tilde{f}$ de f soit bien dans $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{\mathrm{pm}}$, et ce afin d'appliquer le théorème de Dirichlet.

III.3. *Exercice 3 (démonstration du théorème 4)*

Démontrer le théorème 4 du plan pour des fonctions réelles définies sur un intervalle I (une limite uniforme de fonctions continues est continue).

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in I$. Par convergence uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in I$, on ait :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Par continuité de f_{n_0} en a, il existe $\mathcal{V}(a)$, un voisinage ouvert de a dans I, tel que, pour tout $x \in \mathcal{V}(a)$, on ait :

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \varepsilon.$$

Alors par l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in \mathcal{V}(a)$, on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \leq 3\varepsilon,$$

d'où la continuité de f en a.

III.4. *Exercice 4 (une application d'Abel au produit de Cauchy)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. On suppose de plus que $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$, et $\sum_{n\geq 0} w_n$ convergent. Montrer qu'on a :

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right).$$

Comme les trois séries convergent, les séries entières $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$ sont bien définies sur $\mathcal{D}(0,1)$, et elles convergent absolument pour $|x| < 1$. Alors, pour tout $|x| < 1$, par produit de Cauchy, on a :

$$\sum_{n\geq 0} w_n x^n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n x^n\right).$$

Le théorème d'Abel nous donne le résultat en faisant tendre x vers 1.

III.5. *Exercice 5 (sur une interversion série-intégrale)*

Montrer qu'on a la relation suivante pour tout $x \in]0,1[$:

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $x^{-x} = \exp(-x\ln(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$.

On peut prolonger $x :\mapsto -x\ln(x)$ par continuité à [0,1] en lui donnant la valeur 0 en $x = 0$. Ce prolongement, noté f, est continue sur le compact $[0,1]$, et est donc borné par une contante $M \in \mathbb{R}_+^*$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $\frac{f(x)^n}{n!} \leq \frac{M^n}{n!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f(x)^n}{n!}$ converge normalement sur le segment $[0,1]$. Donc on peut effectuer l'interversion série/intégrale. On a alors :

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln(x))^n\mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$, on obtient alors :

$$\int_0^1 (-x\ln(x))^n\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 (-u\exp(u))^n\exp(u)\mathrm{d}u = (-1)^n\int_{-\infty}^0 u^n\exp((n+1)u)\mathrm{d}u.$$

On effectue alors une intégration par parties :

$$\int_0^1 (-x\ln(x))^n\mathrm{d}x = (-1)^n\left(\left[\frac{u^n}{n+1}\exp((n+1)u)\right]_{-\infty}^0 - \frac{n}{n+1}\int_{-\infty}^0 u^{n-1}\exp((n+1)u)\mathrm{d}u\right).$$

Donc on a :

$$\int_0^1 (-x\ln(x))^n\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\int_{-\infty}^0 u^{n-1}\exp((n+1)u)\mathrm{d}u,$$

puis en itérant les intégrations par parties, on obtient :

$$\int_0^1 (-x\ln(x))^n \mathrm{d}x = (-1)^{2n} \frac{n!}{(n+1)^n} \int_{-\infty}^0 \exp((n+1)u)\mathrm{d}u = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Finalement, en réindiçant la somme, on a :

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.}$$

III.6. *Exercice 6 (sur la fonction Gamma)*

Montrer que l'intégrale $I(x) = \int_0^1 \exp(-t)t^{x-1}\mathrm{d}t$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis établir que pour tout $x > 0$, on a :

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

On constate que lorsque t tend vers 0, on a pour tout $x > 0$, $\exp(-t)t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, intégrable en 0 car $1 - x < 1$.

On a également, pour tout $t \in]0,1]$ et tout $x > 0$, $\exp(-t)t^{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1}$.

On remarque que pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1} \right| \leq \frac{1}{n!},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1}$ converge normalement et on peut effectuer l'intersion limite/intégrale.

Donc pour tout $x > 0$ on a :

$$I(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

Cette formule est intéréssante car la série obtenue a un sens pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-$. On a ainsi une expression de la fonction gamma. Pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-$, on a :

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} \exp(-t)t^{x-1}.$$

La dernière intégrale est bien définie car lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\exp(-t)t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On peut alors montrer que les deux termes de la somme définissent chacun une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, et donc Γ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

IV. Références bibliographiques

[Candelpergher 2004] Candelpergher, B. : *Calcul intégral.* Cassini, 2004

[Combes 1982] Combes, J. : *Suites et séries.* Presses universitaires de France, 1982

[Gapaillard 1997] Gapaillard, J. : *Intégration pour la licence : cours avec exercices corrigés.* Masson, 1997

[Gourdon 1994] Gourdon, X. : *Les maths en tête.* 1994

[Hauchecorne 1988] Hauchecorne, B. : *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses Paris, 1988

[Moisan 1992] Moisan, Tosel : *Suites et séries de fonctions.* Ellipses, 1992

[Pommelet 1994] Pommelet, A. : *Analyse pour l'agrégation.* Ellipses, 1994

[Queffélec 2013] Queffélec, Claude : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013

[Rouvière 1999] Rouvière, F. : *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 1999