# Théorèmes d'Abel angulaire et Taubérien faible

Référence : Gourdon Analyse p. 252

**Théorème 1** (Théorème d'Abel)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence[1] $\geqslant 1$ telle que $\sum a_n$ converge.

On note $f$ la somme de cette série entière sur le disque unité (ie $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$).

On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

Alors on a :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

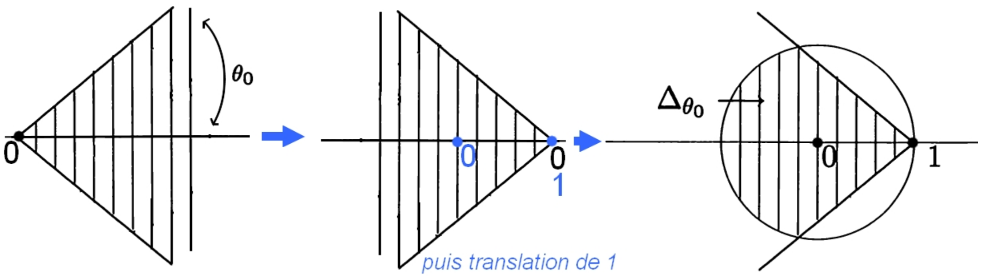


Fig. La région $\Delta_{\theta_0}$. L'écartement du secteur angulaire est $2\theta_0$.

**Preuve du Théorème 1 :**

Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout $n$.
Soit $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) - S_N &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)}_{=0 \text{ pour } n=0} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

1. redondant avec la suite

et en faisant tendre $N$ vers $+\infty$ on en déduit

$$\underline{f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n} \qquad (\star)$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$ (possible car la série converge).
D'après (**??**), on a pour tout $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + \varepsilon\,|z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right) \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}\underbrace{|z|^{N+1}}_{\leqslant 1}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, de sorte que $z = 1 - \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ avec $\rho > 0$ et $|\phi| \leqslant \theta_0$.
On a $|z|^2 = (1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$.
Comme on fait tendre $z$ vers 1, on peut prendre $\rho$ aussi petit qu'on veut, par exemple : $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$.
On a alors la majoration [2]

$$\begin{aligned}
\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|)\\
&= \frac{\rho}{2\rho\cos(\phi) - \rho^2}(1+|z|)\\
&\leqslant \frac{2}{2\cos(\phi) - \rho}\\
&\leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha\left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) < \varepsilon$.

D'après tout ce qui précède on a, $\forall z \in \Delta_{\theta_0},\ |z-1| \leqslant \min(\alpha, \cos(\theta_0))$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1|\,\frac{\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon\frac{2}{\cos(\theta_0)} \leqslant \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

■

**Remarque :** La réciproque de ce théorème est fausse.
Par exemple, on a $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ et pourtant $\sum (-1)^n$ diverge.
Cependant, le théorème suivant donne une réciproque affaiblie si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Théorème 2** (Théorème Taubérien faible - 1897)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et $f$ la somme de cette série entière sur le disque unité.
On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C}, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\|x|<1}} f(x) = S.$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

**Preuve du Théorème 2 :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in ]0,1[,\quad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{(1-x^k)}_{>0} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

2. en utilisant le fait que cos est décroissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

De plus,

- pour $x \in ]0,1[$, $(1-x^k) = (1-x)\underbrace{(1+x+\cdots+x^{k-1})}_{\leqslant k\times 1} \leqslant k(1-x)$
- lorsque $k \geqslant n+1$, $\dfrac{k}{n} \geqslant 1$, et donc $|a_k| \leqslant \dfrac{k}{n}|a_k|$

Donc :

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\,|a_k|}{n} x^k \leqslant (1-x)Mn + \frac{\sup\limits_{k>n} k\,|a_k|}{n(1-x)}$$

où $M$ désigne un majorant de la suite $(k\,|a_k|)$ [3].
Fixons maintenant $\varepsilon \in ]0,1[$. Par ce qui précède on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup\limits_{k>n} k\,|a_k|}{\varepsilon}$$

donc si $N_0$ est choisi tel que $\sup\limits_{k>N_0} k\,|a_k| < \varepsilon^2$ (on peut car $k\,|a_k| \to 0$), on en déduit

$$\forall n \geqslant N_0, \quad \left|S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})\right| \leqslant (M+1)\varepsilon$$

Or $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S$ donc il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\left|f(1-\frac{\varepsilon}{n}) - S\right| < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant N_1, \quad |S_n - S| \leqslant \left|S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})\right| + \left|f(1-\frac{\varepsilon}{n}) - S\right| \leqslant (M+1)\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon$$

ie $S_n \to S$ ■

---

Notes :

✓ **A l'oral**, il faut aller un peu vite, notamment sur l'énoncé des théorèmes. 14'38 allure normale).
✓ En appliquant le **Théorème 1** à $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (qui vérifie bien les hypothèses), on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

On peut également montrer par exemple $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$
✓ Si la série $\sum a_n$ CVA, le résultat du **Théorème 1** est évident. En effet, on a alors $\sum a_n z^n$ CVN (CV pour la norme infinie) sur $|z| \leqslant 1$, donc par théorème est continue sur $|z| \leqslant 1$, donc en 1.
✓ On peut généraliser le théorème Taubérien : théorème Taubérien fort ou théorème de Hardy-Littlewood.

**Théorème 3**

Soit $(a_n)$ une suite de réels vérifiant $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ en $+\infty$, telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $\geqslant 1$, et sa somme $F(x)$ vérifie $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = s$. Alors la série $\sum a_n$ converge et vaut $s$.

♣ Niels Abel (1802 - 1829) -tuberculose- est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.
♣ Alfred Tauber (1866 - 1942) -victime des exactions nazies, déporté en 1942- est un mathématicien slovaque. Professeur (assistant) d'analyse à Vienne, il se tourna vers la physique mathématique issue des travaux de Poisson sur la théorie du potentiel et fut par ailleurs recruté en tant que mathématicien par les assurances Phoenix (fondées en 1829). Le nom de Tauber est principalement attaché à la mise en place de réciproques de divers critères de convergence d'intégrales et de séries, critère d'Abel.

3. Elle est bien majorée car tend vers 0 par hypothèse car $na_n \to 0$ donc $n\,|a_n| \to 0$