Action de Steinitz

Référence : H2G2 p.2 à 5 et 9 à 11.
Leçons : 101,150,151,152.

Théorème

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Posons $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$. On considère l'action de Steinitz par équivalence définie par :

$$: \left| \begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q),M) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array} \right.$$

Alors :

1. (Théorème du rang) Deux matrices A et B sont dans la même orbite ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
2. On note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r pour $r \in [\![0, \min(m,n)]\!]$. Alors l'adhérence de $\mathcal{O}_r$ est donnée par $\overline{\mathcal{O}_r} = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ Soient A et B deux matrices équivalentes (ie dans la même orbite pour cette action).
   Alors $\exists (P,Q) \in G$ tq $B = PAQ^{-1}$. Donc A et B expriment la même forme linéaire par changement de base. En effet :
   Soient B_n une base de $\mathbb{K}^n$,B_m une base de $\mathbb{K}^m$ et $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire telle que[1] $A = \mathrm{Mat}_{B_n,B_m}(\varphi)$ ie les colonnes de A sont données par les vecteurs $\varphi(e_j)$ dans la base B_m.
   Comme $(P,Q) \in G$, ce sont des matrices de changement de bases. Par exemple P matrice de passage de B_n à B'_n et Q matrice de passage de B_m à B'_m avec B'_n une base de $\mathbb{K}^n$ et B'_m une base de $\mathbb{K}^m$.
   Donc $B = PAQ^{-1} = \mathrm{Mat}_{B'_n,B'_m}(\varphi)$.
   En particulier, $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(\text{ colonnes de } A)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi)$ et de même pour B. Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

   $\Leftarrow$ Soit A matrice de rang r. On garde les mêmes notations que précédemment ie B_n une base de $\mathbb{K}^n$,B_m une base de $\mathbb{K}^m$ et $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire telle que $A = \mathrm{Mat}_{B_n,B_m}(\varphi)$. On note

$$I_{m,n,r} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, r \text{ lignes} \\ \}\, m-r \text{ lignes} \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{r \text{ col.}}\underbrace{\quad}_{n-r \text{ col.}} & \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

   Il suffit de montrer que A est équivalente à $I_{m,n,r}$. Alors B le sera aussi donc A et B le seront.

2.

■

Notes :

✓ **A l'oral**,
♣ Ernst Steinitz (1871 – 1928) est un mathématicien allemand. La thèse de Steinitz portait sur les configurations projectives.

1. Par ex, prendre les bases canoniques et $\varphi : X \in \mathbb{K}^n \mapsto AX \in \mathbb{K}^m$.