Automorphismes de $K(X)$

Référence : FGNal1 : exercice 5.54
Leçons : 140, 125, 141

Théorème

Soit K un corps quelconque.

Les automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ sont les applications de la forme $\left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array} \right.$ où $a, b, c, d \in K^4$ vérifient $ad - bc \neq 0$.

Preuve :

Étape 1 : Déterminons les endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$.

Soit Φ un endomorphisme de K-algèbres de $K(X)$. Posons $F = \Phi(X)$.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k X^k \in K[X]$, on a : $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \Phi(X^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k F^k = P \circ F$.

Ainsi, pour tous $P \in K[X]$, $Q \in K[X]\backslash\{0\}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$, où, on a : $\Phi(G) = \dfrac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \dfrac{P\circ F}{Q \circ F} = G \circ F$.

Réciproquement, pour $F \in K(X)\backslash K$, Φ_F : $\left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G \circ F \end{array} \right.$ est bien un morphisme de K-algèbres. [1]

Remarquons que si $F = a \in K$, alors Φ_F n'est pas bien défini : en effet $\dfrac{1}{X-a}$ n'a pas d'image par Φ_F.

Ainsi, l'ensemble des endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des Φ_F, où F parcourt $K(X)\backslash K$ [2].

Étape 2 : Cherchons à quelle condition sur F, Φ_F est un automorphisme.

Supposons que Φ_F soit un automorphisme.

Alors Φ_F est surjectif et donc : $\exists G \in K(X), \Phi_F(G) = G \circ F = X$.

Soient $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$ des représentations irréductibles de ces fractions rationnelles.

On écrit $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{d_P} p_j X^j$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d_Q} q_k X^k$ où d_P et d_Q sont les degrés respectifs de P et Q.

On a : $G \circ F = X \Leftrightarrow P \circ F = X \times (Q \circ F)$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j F^j = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k F^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j \frac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k \frac{A^k}{B^k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k A^k B^{m-k}, \text{ où on a noté } m = \max\{d_P, d_Q\}.$$

1. Il s'agit de vérifier :
— $\Phi_F(1) = 1$.
— $\Phi_F(G)$ est bien défini pour tout $G \in K(X)$.
Pour cela, on montre que $G \circ F = \dfrac{B^m \times (P \circ F)}{B^m \times (Q \circ F)}$, où $F = \dfrac{A}{B}$ est une écriture irréductible et $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ est une écriture de $G \circ F$ en fraction de polynômes et que le polynôme $B^m \times (Q \circ F)$ n'a qu'un nombre fini de racines.
— Φ_F est K-linéaire.
— $\Phi_F(G_1 G_2) = \Phi_F(G_1)\Phi_F(G_2)$ pour tous $G_1, G_2 \in K(X)$.

2. nécessairement, ça a été vérifié dans le "réciproquement"

— D'une part, $A|(p_0 - q_0X)\,B^m$ [3].
Or A et B sont premiers entre eux, donc A et B^m sont également premiers entre eux, d'où $A|p_0 - q_0X$.
Aussi, comme P et Q sont premiers entre eux, on a $(p_0, q_0) \neq (0,0)$.
Donc $p_0 - q_0X$ est de degré 0 ou 1, donc A est de degré 0 ou 1.

— D'autre part, $B\big|p_{d_P}A^{d_P}B^{m-d_P} - q_{d_Q}XA^{d_Q}B^{m-d_Q}$.

  — Si $m = d_P = d_Q$, alors $B|(p_m - q_mX)\,A^m$ et donc $B|p_m - q_mX$ car B et A^m sont premiers entre eux. Or $q_m \neq 0$ car Q est de degré $m = d_Q$, donc $\deg B = 0$ ou 1.
  — Si $m = d_Q > d_P$, alors $B|q_mXA^m$ donc $B|q_mX$ donc $\deg B = 0$ ou 1.
  — Si $m = d_P > d_Q$, alors $B|p_mA^m$ donc $B|p_m$ donc $\deg B = 0$.

  Toujours est-il que $\deg B = 0$ ou 1.

Par conséquent, il existe $(a,b,c,d) \in K^4, F = \dfrac{aX+b}{cX+d}$.
Et F ne pouvant évidemment pas être constant, on doit imposer [4] $ad - bc \neq 0$.

Étape 3 : Réciproquement, montrons que cette condition nécessaire est suffisante.
Pour $(a,b,c,d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on note $\Phi_{a,b,c,d}$ le morphisme de K-algèbres défini par : $\Phi_{a,b,c,d}(X) = \dfrac{aX+b}{cX+d}$.

Montrons que : $\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(K) & \to & \mathrm{End}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \Phi_{a,b,c,d} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes.

Cela découle de l'égalité :

$$\frac{a\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + b}{c\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')X + (ab'+bd')}{(ca'+dc')X + (cb'+dd')}$$

On reconnaît effectivement les coefficients du produit matriciel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ ie $\Phi(MM') = \Phi(M)\Phi(M')$.

On en déduit alors que $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible, d'inverse $\Phi_{a',b',c',d'}$ où $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$, car $ad-bc \neq 0$.

Donc pour $(a,b,c,d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, $\Phi_{a,b,c,d}$ est un automorphisme de K-algèbres de $K(X)$.

On en déduit finalement que l'ensemble des automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des applications de la forme $\left|\begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array}\right.$ avec $(a,b,c,d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.

■

Réponses à de possibles questions

1. Pourquoi ça s'appelle $\underline{\mathbf{P}}\mathrm{GL}_2(K)$?
   $\hookrightarrow$

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, bla
✓ S'il y a du temps : Le 2nd théorème d'isomorphisme peut même nous donner un résultat supplémentaire.
On a montré au cours de la démonstration que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X))$.
De plus

$$\Phi_{a,b,c,d}(X) = X \Leftrightarrow aX + b = cX^2 + dX \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ et } a = d$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \left\{\lambda I_2 \big| \lambda \in K^\times\right\}$.
Et on en déduit donc $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \simeq \mathrm{GL}_2(K)/\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{GL}_2(K)/\left\{\lambda I_2 \big| \lambda \in K^\times\right\} = \mathrm{PGL}_2(K)$

---

3. Il suffit d'écrire, avec l'égalité juste au dessus : $p_0B^m - q_0XB^m = A\left(X\sum_{k=1}^{d_Q} q_kA^{k-1}B^{m-k} - \sum_{j=1}^{d_P} p_jA^{j-1}B^{m-j}\right)$

4. Si $\dfrac{aX+b}{cX+d} = \gamma$ alors $a = c\gamma$ et $b = d\gamma$ donc $ad = bc$