Sous-groupes distingués et caractères

Référence : Ulmer p.158+ Peyré p.227

Lemme

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G de caractère χ.
Alors Ker $\chi =$ Ker ρ.

Preuve :

Soit $g \in G$, par Lagrange, $g^{\#G} = \mathrm{e}$ donc $\rho(g)^{\#G} = \rho(g^{\#G}) = \rho(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ donc $\rho(g)$ est d'ordre fini divisant $\#G$, donc est diagonalisable ; on peut même dire que ses valeurs propres, qu'on nomme λ_j, où $j \in [\![1, \dim V]\!]$, sont des racines de l'unité et donc de module 1.
On en déduit $\chi(g) = \sum_{i=1}^{\dim V} \lambda_j$, ce qui fournit : $|\chi(g)| \leqslant \sum_{j=1}^{\dim V} |\lambda_j| = \dim V = \chi(\mathrm{e})$.
Mais le cas d'égalité dans cette inégalité triangulaire est $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{\dim V}$.
Ainsi : $\chi(g) = \chi(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\dim V} = 1 \Leftrightarrow \rho(g) = \mathrm{Id}_V \Leftrightarrow g \in$ Ker ρ. ■

Théorème

Soit G un groupe fini de caractères irréductibles $\chi_1, \ldots, \chi_m$.
Alors les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j \in J}$ Ker χ_j, où $J \subset [\![1, m]\!]$.

Preuve :

Étape 1 : Soit $H \lhd G$.

On considère l'action par translation à gauche de G sur G/H dont on note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{G/H} \\ g & \longmapsto & (xH \mapsto gxH) \end{array} \right.$ le morphisme structurel.

Soit alors χ le caractère associé à la représentation par permutations $\rho_{\mathrm{p},\varphi} : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL_{|G/H|}(\mathbb{C}) \\ g & \longmapsto & \big(v_i \mapsto v_{\varphi(g)(i)}\big) \end{array} \right.$

Le **Lemme** nous donne que : Ker $\chi =$ Ker$\rho_{\mathrm{p},\varphi} =$ Ker$\varphi =$ [1] H.
Les sous-groupes distingués de G sont donc les noyaux des caractères de G.

Étape 2 : On va exprimer les noyaux des caractères de G en fonction des noyaux des caractères irréductibles de G.
Soit χ un caractère de G, associé à la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

On décompose alors V en somme directe de sous-représentations irréductibles : $V = \bigoplus_{i=1}^{s} \underbrace{V_i \oplus \ldots \oplus V_i}_{a_i \text{ fois}}$,
avec $V_1, \ldots, V_s$ représentations irréductibles "distinctes" de G, de caractères associés $\chi_1, \ldots, \chi_s$.
On a alors, en réutilisant le **Lemme** : $g \in$ Ker $\chi \Leftrightarrow g \in$ Ker $\rho \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, s]\!], g \in$ Ker $\rho|_{V_i} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, s]\!], g \in$ Ker χ_i.

Donc Ker $\chi = \bigcap_{i=1}^{s}$ Ker χ_i.

■

On va appliquer ce résultat à $\mathcal{D}_6$. Commençons par déterminer sa table de caractères.

1. Si on a du mal à le voir on l'écrit Ker$\varphi = \{g \in G / \varphi(g) = Id\} = \{g \in G / \forall xH \in G/H\, gxH = xH\} = \{g \in G / \forall xH \in G/H, g = xHx^-1\} = H$ en utilisant le fait que H est distingué

Étape 1 : On va chercher d'abord tous ses caractères irréductibles de degré 1 ; ce sont les morphismes de groupes de $\mathcal{D}_6 \to \mathbb{C}^*$.
Nécessairement, si χ est un caractère de degré 1 de $\mathcal{D}_6$, on a : $\chi(s)^2 = \chi(\mathrm{e}) = 1$ et donc $\chi(s) = \pm 1$.
Mais aussi, $\chi(sr)^2 = 1$ et donc $\chi(s)\chi(r)\chi(s)\chi(r) = 1$, d'où $\chi(r) = \pm 1$.
Il y a donc 4 candidats possibles pour être une représentation parmi ces applications, il resterait à vérifier que ce sont bien des morphismes de groupes de $\mathcal{D}_6 \to \mathbb{C}^*$.

Étape 2 : Les autres caractères de $\mathcal{D}_6$ sont nécessairement de degré supérieur ou égal à 2.
La relation reliant degrés des caractères irréductibles et cardinal du groupe, $\sum_{i\in I} n_i^2 = \#G$, nous indique qu'il nous reste à trouver 2 caractères irréductibles de degré 2.
On aura alors la table de $\mathcal{D}_6$.

Étape 3 : On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$, autrement dit $\omega^2 = \mathrm{j}$ et pour $h \in \{1,2\}$:

$$\rho_h\left(r^k\right) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho_h\left(sr^k\right) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$$

On devrait vérifier que $\rho_h : \mathcal{D}_6 \to GL\left(\mathbb{C}^2\right)$ est bien un morphisme de groupes, ie, une représentation.
On note alors χ_h, pour $h \in \{1,2\}$, le caractère de ρ_h.

On a : $\#\mathcal{D}_6\langle \chi_h, \chi_h\rangle = \sum_{k=0}^{5}\left(\chi_h\left(r^k\right)^2 + \chi_h\left(sr^k\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{5}\left(\omega^{hk} + \omega^{-hk}\right)^2 = \sum_{k=0}^{5}\omega^{2hk} + 2\times 6 + \sum_{k=0}^{5}\omega^{-2hk}$
$= 12 + 4\left(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2\right) = 12.$

L'avant dernière égalité se voit sur un dessin mais sinon on peut l'écrire en détaillant tout. Donc χ_1 et χ_2 sont bien irréductibles.
Voici la table des caractères irréductibles de $\mathcal{D}_6$.

	$\boxed{1}$ e$= r^0$	$\boxed{5}$ r^k	$\boxed{6}$ sr^k	Ker
ψ_1	1	1	1	$\mathcal{D}_6$
ψ_2	1	1	-1	$\langle r\rangle$
ψ_3	1	$(-1)^k$	$(-1)^k$	$\langle r^2, sr^2\rangle = \langle r^2, s\rangle$
ψ_4	1	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$	$\langle r^2, sr\rangle$
χ_1	2	$2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$	0	$k = 6$ donc $\{\mathrm{e}\}$
χ_2	2	$2\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$	0	$k = 3$ donc $\langle r^3\rangle = \{\mathrm{e}, r^3\}$

Les sous-groupes distingués de $\mathcal{D}_6$ sont donc : $\mathcal{D}_6$, $\langle r\rangle$, $\langle sr^2, r^2\rangle$, $\langle sr, r^2\rangle$, $\{\mathrm{e}\}$, $\langle r^3\rangle$ et $\langle r^2\rangle$ (ce dernier étant l'intersection des noyaux de ψ_2 et ψ_3 par exemple).

Notes :

✓ **A l'oral**, on voit ce qu'on détaille de la table selon le temps qu'il reste. 14'03 vite.