Théorème de Cauchy-Lipschitz

Référence : Rouvière exercice 60 p.179
Leçons : 203,206,220,221

Théorème (Cauchy-Lipschitz - 1876)

On considère l'espace $\mathbb{R}^m$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement lipschitzienne en la seconde variable au sens suivant :
pour tout intervalle compact $K \subset I$, $\exists k > 0$ tel que pour tout $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k\,\|y - z\|$$

Alors, si $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ sont donnés, le problème de Cauchy (P)

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur I tout entier.

Preuve :

Cas 1 Supposons dans un premier temps que I est compact.

Etape 1 Ramener le problème à celui d'un problème de point fixe.

Dire que y est solution de (P) sur I signifie que $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur I [1] Comme f est continue, on en déduit que y' est continue donc

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

Réciproquement si y est continue sur I et vérifie l'égalité précédente alors elle est dérivable (intégrale fonction de sa borne supérieure) et c'est une solution de (P).
Ainsi le problème (P) équivaut à la recherche d'un point fixe de l'application suivante :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m) \\ y & \longmapsto & \left(F(y) : t \mapsto x + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s\right) \end{array} \right.$$

Etape 2 Montrons que F possède un unique point fixe.

— Soient k la constante de Lipschitz associée à l'intervalle compact I, l la longueur de I et munissons $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ de la norme

$$N_k(y) := \max_{t \in I} \left(\mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\,\|y(t)\|\right)$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$. De plus, $\forall y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ on a :

$$\mathrm{e}^{-kl}\,\|y\|_\infty \leqslant N_k(y) \leqslant \|y\|_\infty$$

Ainsi, N_k et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes donc $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), N_k)$ est complet (car classiquement $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ l'est).

— Comme f est continue [2], $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ est stable par F.

1. I est compact donc contient forcément ses bornes (c'est un segment).

2. On rappelle le résultat suivant : Soit f une fonction **continue** sur I, $a \in I$. L'application $F_a : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée vaut f'.

— Enfin, pour tout $y, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$,$t \in I$ et $t \geqslant t_0$ on a

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\mathrm{d}s$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k \|y(s) - z(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} N_k(y-z) \int_{t_0}^{t} k\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right) N_k(y-z).
\end{aligned}$$

De même, pour $t \leqslant t_0$ on a [3] :

$$\mathrm{e}^{k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leqslant \left(1 - \mathrm{e}^{k(t-t_0)}\right) N_k(y-z)$$

Ainsi, pour tout $t \in I$ on a :

$$\mathrm{e}^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leqslant \left(1 - \mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\right) N_k(y-z)$$

En passant au max sur I on obtient finalement :

$$N_k[F(y) - F(z)] \leqslant \underbrace{(1 - \mathrm{e}^{-kl})}_{<1} N_k(y-z).$$

F est donc contractante sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ muni de la norme N_k de sorte que, par le théorème du point fixe de Picard, (P) admet une solution **unique**.

Cas 2 Cas général tout intervalle quelconque I peut s'écrire comme une réunion croissante d'intervalles compacts [4]

$$I = \bigcup_j I_j \quad \text{avec} \quad t_0 \in I_j$$

Par ce qui précède on peut considérer pour tout j **la** solution y_j de (P) sur I_j.
Si y est une solution de (P) sur I alors pour tout j, $y_{|I_j} \equiv y_j$ par unicité.
Inversement, les fonctions y_j se raccordent par construction des intervalles (croissants) I_j de sorte que le problème (P) admet une solution unique sur I donnée par $y(t) = y_j(t)$ si $t \in I_j$.

■

Adaptation dans le cas linéaire du début de la preuve

3.
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leqslant \mathrm{e}^{k(t-t_0)} \int_{t}^{t_0} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{k(t-t_0)} \int_{t}^{t_0} k \|y(s) - z(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{k(t-t_0)} N_k(y-z) \int_{t}^{t_0} k\mathrm{e}^{k(t_0-s)}\mathrm{d}s = -\mathrm{e}^{k(t-t_0)} N_k(y-z) \left[1 - \mathrm{e}^{k(t_0-t)}\right] \mathrm{d}s \\
&\leqslant \left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right) N_k(y-z)
\end{aligned}$$

4. savoir détailler les cas suivant la forme de I. Par exemple $]-\infty, a[= \bigcup \left[-n, a - \frac{1}{n}\right]$, $]-\infty, a] = \cup[-n, a]$, $]a, b] = \bigcup \left[-a + \frac{1}{n}, b\right]$

Théorème (Cauchy-Lipschitz - 1876)

On considère l'espace $\mathbb{R}^m$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, un intervalle I de $\mathbb{R}$, A et b sont des applications continues sur I à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^m$:
Alors, si $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ sont donnés, le problème de Cauchy (P)

$$\begin{cases} y'(t) & = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = x \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur I tout entier.

Preuve :

Cas 1 Supposons dans un premier temps que I est compact.

Etape 1 Ramener le problème à celui d'un problème de point fixe.

Dire que y est solution de (P) sur I signifie que $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur I. Comme A et b sont continues, on en déduit que y' est continue donc

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + b(s)\mathrm{d}s.$$

Réciproquement si y est continue sur I et vérifie l'égalité précédente alors elle est dérivable (intégrale fonction de sa borne supérieure) et c'est une solution de (P).
Ainsi le problème (P) équivaut à la recherche d'un point fixe de l'application suivante :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m) \\ y & \longmapsto & (F(y) : t \mapsto x + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + b(s)\mathrm{d}s) \end{array} \right.$$

Etape 2 Montrons que F possède un unique point fixe.

- Comme A est continue sur le compact I, on peut poser $k := \max_{t\in I} |||A(t)|||$. Soit l la longueur de I et munissons $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ de la norme

  $$N_k(y) := \max_{t\in I} \left(\mathrm{e}^{-k|t-t_0|} \|y(t)\| \right)$$

  On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$. De plus, $\forall y \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ on a :

  $$\mathrm{e}^{-kl} \|y\|_\infty \leqslant N_k(y) \leqslant \|y\|_\infty$$

  Ainsi, N_k et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes donc $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m), N_k)$ est complet (car classiquement $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ l'est).
- Comme A, b et y sont continues[5], $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ est stable par F.
- Enfin, pour tout $y, z \in \mathbb{R}^m$,$t \in I$ et $t \geqslant t_0$ on a

  $$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)[y(s) - z(s)]\mathrm{d}s$$

  d'où

  $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|A(s)[y(s) - z(s)]\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k \|y(s) - z(s)\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} N_k(y-z) \int_{t_0}^{t} k\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\mathrm{d}s \\ &\leqslant \left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right) N_k(y-z) \end{aligned}$$

5. On rappelle le résultat suivant : Soit f une fonction **continue** sur I, $a \in I$. L'application $F_a : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée vaut f'.

■

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, selon la leçon on fait linéaire ou pas. 9'33 avec le cas 1 et 11'32 au total en allant normal. Rajouter démo du thm de point fixe (Demailly)
✓ Version plus générale du théorème de Cauchy-Lipschitz. Si U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour toute donnée initiale $(t_0, x) \in U$, le système différentiel

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

admet une solution maximale (qui ne peut être prolongée) unique.
♣ Augustin CAUCHY (1789-1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Ses positions politique (royaliste légitimiste) et religieuse (catholique fervent) lui valurent nombre d'oppositions. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques. Son oeuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle mais la négligence dont il fit consécutivement preuve sur les travaux de GALOIS ("incompréhensible") et d'ABEL ("encre trop pâle") entacha son prestige.
♣ Rudolph LIPSCHITZ (1832- 1903) est un mathématicien allemand. Il a laissé son nom aux applications à dérivée bornée (application lipschitzienne). En réalité, son travail s'étend sur des domaines aussi variés que la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique, en particulier la résolution des équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi. Son travail sur les équations différentielles vient préciser les résultats obtenus par CAUCHY. Lipschitz a en outre donné un critère de convergence des développements en série de Fourier.