Critère de Weyl

Laura Gay d'après F. Bouguet et A. Fontaine

Référence : FGNAn2 p. 47 exo 1.28

Définition (*Suite équirépartie*)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.
Pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, notons $X_n(a,b) = \text{Card}\{k \in [\![1,n]\!] \mid u_k \in [a,b]\}$.
On dit que (u_n) est équirépartie si, pour tout $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, $\dfrac{X_n(a,b)}{n} \to b-a$.

Proposition

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie, l'ensemble des u_n est dense dans $[0,1]$.

La réciproque est cependant fausse. En effet, on peut montrer que la suite $(|\sin(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans [0, 1] mais n'est pas équirépartie. Intuitivement, cela vient du fait que la suite $|\sin(n)|$ stationne plus longtemps sur certaines valeurs.

Preuve :

[FGNan 2 exo 1.27] En effet, si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie alors pour tout $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, $\dfrac{X_n(a,b)}{n} \to b-a > 0$. Donc il existe un rang N au delà duquel $\dfrac{X_n(a,b)}{n} > 0$. Donc il existe au moins un indice k tel que $u_k \in [a,b[$. Entre deux termes de $[0,1]$ je peux mettre un terme de (u_n). ■

Proposition (*Critère de Weyl - 1916*)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.
On a équivalence entre

(i) (u_n) équirépartie.

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que [1] $f(0)=f(1)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f$

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2i\pi p u_k} = 0$

Preuve :

Soit $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) :
Commençons par remarquer que, par définition d'une suite équirépartie,

$$\frac{X_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(u_k) \longrightarrow \int_a^b \mathbb{1}_{[a,b]} = b-a$$

La propriété (ii) est donc vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment. Par linéarité, elle est vraie pour toutes les fonctions en escalier [2].

1. FGN dit : Si f ne vérifie pas $f(0)=f(1)$. On peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction continue g vérifiant $g(0)=g(1)$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 |f-g| \leqslant \varepsilon$ (cf dessin ci-dessous). On procède comme dans (i) $\Rightarrow$ (ii) pour montrer que (ii) est alors vraie pour f aussi. Mais c'est un peu foireux si on l'écrit proprement.

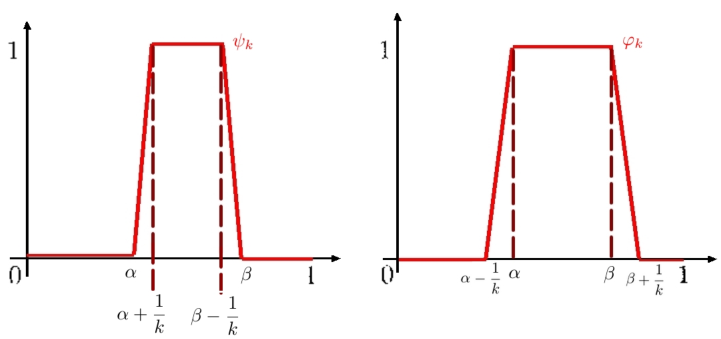
2. Les fonctions en escalier sur un segment est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments (segments éventuellement réduits à un point pour obtenir les valeurs de la fonction aux points de discontinuité).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après le **Lemme** ci-dessous, on peut trouver g une fonction en escalier telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. g est en escalier, donc il existe N tel que, pour $n \geqslant N$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| < \varepsilon$.
Par inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right| &\leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - g(u_k)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 (g-f)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n} n\varepsilon + \varepsilon + \int_0^1 \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

Donc (ii).

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i) :</u>
Une fonction caractéristique d'une segment $I \subset [0,1]$ (distinct de $[0,1]$ [3]) présente au moins une discontinuité, donc ne peut pas être obtenue comme limite uniforme de fonctions continues. En fait, on n'a pas besoin d'une approximation uniforme : il va suffire d'encadrer $\mathbb{1}_I$ par deux suites de fonctions continues affines par morceaux qui convergent vers $\mathbb{1}_I$ au sens de la norme intégrale.
Prenons pour commencer un segment $I = [\alpha,\beta]$ où $0 < \alpha < \beta < 1$. On considère les suites de fonctions continues φ_k et ψ_k définies pour k suffisamment grand par les figures suivantes :



On a, pour tout p, $\psi_p \leqslant \mathbb{1}_I \leqslant \varphi_p$. Or $\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(u_k)$.
Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_p(u_k) \leqslant \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_p(u_k)$$

Par hypothèse,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_p(u_k) = \int_0^1 \psi_p = \beta - \alpha - \frac{1}{p}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_p(u_k) = \int_0^1 \varphi_p = \beta - \alpha + \frac{1}{p}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors, en passant à la $\underline{\lim}$ à gauche et à la $\overline{\lim}$ à droite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\beta - \alpha - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} \leqslant \beta - \alpha + \varepsilon$$

Donc $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} = \alpha - \beta$.
D'où, le résultat sauf au bord. Il suffit ensuite d'adapter les ψ_p et φ_p dans le cas où $\alpha = 0$ et/ou $\beta = 1$ et/ou $\alpha = \beta$

3. $\mathbb{1}_{[0,1]}$ n'a pas de discontinuités sur $[0,1]$.

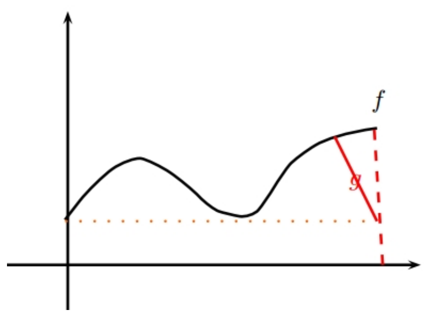
(dans ce cas là on va avoir la fonction nulle et un pic) et on obtient la même chose. On en déduit (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :
(ii) étant vraie pour toute fonction continue , elle est vérifiée pour $x \mapsto \cos(2\pi p x)$ et $x \mapsto \sin(2\pi p x)$. En écrivant

$$\mathrm{e}^{2i\pi p x} = \cos(2\pi p x) + \mathrm{i}\sin(2\pi p x)$$

on obtient immédiatement (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) :
(iii) étant vérifiée, on déduit que la relation $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(u_k) = \int_0^1 \varphi$ est vraie par linéarité pour tout polynôme trigonométrique $\varphi : x \mapsto a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi x)$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.
Par le théorème de Weierstrass trigonométrique, comme f est 1-périodique [4], il existe φ polynôme trigonométrique tel que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.
■



Lemme

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme de fonctions en escaliers.

Preuve :
[Gourdon p96] Comme $[a, b]$ est compact, f est uniformément continue sur $[a, b]$ d'après le théorème de Heine.
Ainsi, soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists \eta > 0 \ , \ \forall x, y \in [a, b] \ / \ |x - y| < \eta \ , \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $x_i - x_{i-1} < \eta$ pour tout i.
Soit

$$\begin{array}{cccl} \varphi : & [a,b] & \to & E \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i \\ f\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[\end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est en escalier et elle vérifie, pour tout $x \in [a, b]$, $\|f(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon$ (avec l'UC de f) donc $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. ■

Application

Définition

On dit qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si la suite $u_n = x_n - E(x_n)$ est équirépartie.

4. logiquement il faut une fonction 2π-périodique mais on se ramène facilement à l'un ou l'autre des cas en posant $g(x) = f(2\pi x)$ ou $g(x) = f(\dfrac{x}{2\pi})$

Le critère de Weyl donne donc :

$$(x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est équirépartie modulo } 1 \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}p\pi x_k} = 0$$

On a alors le résultat suivant (FGNAn2 exo 1.29 p50) :
Soit $\theta > 0$, alors la suite $(n\theta)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$. On peut en déduire un résultat sur la distribution du premier chiffre de l'écriture en base 10 des puissances de 2 (FGNal1 exo 1.15). Plus précisément, on montre que le chiffre i ($1 \leqslant i \leqslant 9$) apparaît d'autant plus souvent en première position dans l'écriture en base 10 des puissances de 2, qu'il est petit ! Cela se montre par l'intermédiaire du théorème de Bohl-Sierpinski-Weyl qui est une conséquence immédiate de ce dernier résultat.

Notes :

✓ **A l'oral**, on va normalement quitte à speeder un peu à la fin.
✓ Une fonction définie sur un segment est dite une escalier s'il existe une subdivision de ce segment telle que sur chaque petit segment, la fonction est constante.
✓ (ii) reste vrai pour les fonctions continue par morceaux ou même réglées. Cela peut être une question du jury que de le montrer.
✓ Le critère de Weyl est l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii).
✓ De manière informelle, une suite est dite équirépartie si pour tout intervalle $I \subset [0,1]$, la probabilité pour un terme de la suite d'être dans I est égale à la longueur de I.
♣ Hermann Weyl (1885 - 1955) est un mathématicien et un physicien théoricien des plus influents du XXe siècle. En 1918, développant la géométrie de Weyl (ou géométrie conforme) et introduisant par la même la notion de jauge, il fut le premier à combiner la relativité générale avec l'électromagnétisme.Ses recherches en mathématiques portèrent essentiellement sur la topologie, la géométrie et l'algèbre. Weyl publia également de nombreux travaux sur l'espace, le temps, la matière, la mécanique quantique, la philosophie, la logique, la théorie des nombres et l'histoire des mathématiques.