Décomposition de Dunford

Référence : Gourdon Algèbre : p.194-195
Leçons : 126, 128, 153, 154, 155, 157.

Soit K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie.
⚠Ici, toutes les puissances d'endomorphismes sont des composées !!!

Lemme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un polynôme annulateur de f, de décomposition en facteurs irréductibles $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$. Pour tout i, on note $N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors, $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ et, pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Preuve du Lemme :
La décomposition $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ découle immédiatement du lemme des noyaux.
Etape 1 : Construire des projecteurs comme des polynômes en f

On pose $Q_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun facteur commun à tous les Q_i). Bézout donne alors l'existence de $U_1, \cdots, U_s \in K[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$ ie

$$Id = U_1(f) \circ Q_1(f) + U_2(f) \circ Q_2(f) + \cdots + U_s(f) \circ Q_s(f).$$

En notant $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$, on obtient

$$Id = \sum_{j=1}^{s} p_j. \tag{0.1}$$

Par ailleurs, si $i \neq j$, par construction, F divise $Q_i Q_j$ donc (on peut tout permuter comme on veut car ce sont des polynômes en f)

$$p_i \circ p_j = P_i(f) \circ P_j(f) = (U_i(f) \circ Q_i(f)) \circ (U_j(f) \circ Q_j(f)) = \underbrace{Q_i(f) \circ Q_j(f)}_{=0} \circ U_i(f) \circ U_j(f) = 0$$

En composant (**??**) par p_i, on obtient $p_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$, donc avec l'égalité du dessus $p_i = p_i^2$. Ceci montre que les p_i sont des projecteurs.

Etape 2 : Vérifions qu'ils projettent bien sur N_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} N_j$ ie $\operatorname{Im} p_i = N_i$ et $\ker p_i = \displaystyle\bigoplus_{i \neq j} N_j$

↪ On a bien $\operatorname{Im} p_i \subset \ker M_i^{\alpha_i}(f)$. En effet, par calcul simple :

$$M_i^{\alpha_i}(f)(p_i(x)) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = (M_i^{\alpha_i} U_i Q_i)(f)(x) = (U_i \underbrace{M_i^{\alpha_i} Q_i}_{=F})(f)(x) = U_i(f) \circ F(f)(x) = 0$$

Pour l'inclusion réciproque, choisissons $x \in N_i$ donc $M_i^{\alpha_i}(f)(x) = 0$.
D'après la décomposition (**??**), $x = p_1(x) + \cdots + p_s(x)$. Or, pour tout $j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j. De fait, $x = p_i(x)$, et $\operatorname{Im} p_i = N_i$.
↪ Si $x \in N_j$, on a vu que $x = p_j(x)$ donc $p_i(x) = p_i \circ p_j(x) = 0$ et $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker p_i$.

Réciproquement, si $x \in \ker p_i$, (**??**) donne $x = \displaystyle\sum_{i \neq j} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$ (car $\operatorname{Im} p_i = N_i$) ■

Théorème

$f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur K.
Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

— $f = d + n$

— d est diagonalisable et n est nilpotent

— n et d commutent et $f = d + n$

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Preuve du Théorème :

Existence

On note le polynôme caractéristique $\chi_f := \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

On va appliquer le **Lemme** avec $F = \chi_f$. On a alors en gardant les notations $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $M_i = X - \lambda_i$ et $p_i = P_i(f)$ le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.

On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$. Ainsi construit, d est diagonalisable [1].

On pose aussi $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i$ [2].

Puisque les p_i sont des projecteurs, qu'ils commutent (comme polynômes en f) avec f et que $\forall i \neq j\,; p_i \circ p_j = 0$ [3], on peut montrer par récurrence sur q que

$$\forall q \in \mathbb{N},\ n^q = \sum (f - \lambda_i \mathrm{Id})^q p_i.$$

Or, si $q = \sup_i \alpha_i$, on a $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^q p_i = [(X - \lambda_i)^q P_i](f) = 0$ car χ_f divise $(X - \lambda_i)^q P_i$ (voir preuve du lemme : $P_i = U_i \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$). Donc n est nilpotent d'indice $\leqslant q$.

d et n sont de plus par construction des polynômes en f (on a donc la commutation), c'est ce qu'il fallait montrer.

Unicité

Soit (d', n') un autre couple convenant. Alors, on a $d - d' = n' - n$.
d' commute avec n', donc avec $f = d' + n'$ donc avec tout polynôme en f. En particulier, d' commute avec d, donc d et d' sont codiagonalisables, ce qui montre que $d - d'$ est diagonalisable.
De même, n et n' commutent donc $n - n'$ est nilpotent [4]. Or une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle, donc $d = d'$ et $n = n'$. ■

Questions possibles - Marine vrai jour

pour commencer pas mal de questions sur Dunford : genre pour commencer vous utilisez le lemme des noyaux mais finalement est-ce que vous ne le redémontrez pas "une certaine façon dans la suite ? – monter que les pi sont des projecteurs sans utiliser la relation Id=somme des pi... – Puis une matrice donner sa décomposition de Dunford, facile elle était diagonalisable ! – Puis l'application qui à une matrice associe sa partie diago de Dunford est-elle continue ? (Non ! cf Objectif agreg)

1. Car somme de projecteurs qui chacun sont diagonalisables sous la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ dans une certaine base, comme des projecteurs commutent ils sont codiagonalisables donc d diagonalisable
2. car $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}$
3. les termes croisés disparaissent donc
4. en notant p et q leur indice de nilpotence respectifs, on a par la formule de binôme de Newton $(n - n')^{p+q} = 0$

Notes :

✓ **A l'oral**, 9' pour le Lemme et 13'33 le tout vite. Une seconde fois 12'45.
✓ Autres références : pour les polynômes en u OA p 209 exo 4.15 ça utilise le théorème des restes chinois, pour une autre demo de dunford FGNAl2 p134 exo 2.40 (unicité = pareil)
✓ Si on a du mal avec les polynômes d'endomorphismes (comme moi) relire Cognet... Je fais quand même des petits rappels si $u \in \mathcal{L}(E)$ (c'est très important la linéarité !), P, Q des polynômes. Alors $PQ(u) := P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ car ce sont des polynômes en u qui commutent donc. Tel quel ça ne sert à rien mais si on applique en $x \in E$ ça prend son sens. Par exemple si $P = 1 + X$ et $Q = X^2$ on a bien

$$P(u) \circ Q(u)(x) = P(u)\left(Q(u)(x)\right) = P(u)(u^2(x)) = P(u)(u(u(x)) = (Id + u)(u(u(x))$$

$$= u(u(x)) + u(u(u(x))) = (X^2 + X^3)(u)(X) = (PQ)(u)(x)$$

♣ Nelson Dunford (1906 -1986) était un mathématicien américain, connu pour ses travaux en analyse fonctionnelle.