Densité des polynômes orthogonaux

Référence : Beck, Malick, Peyré : Objectif agrégation, 2ème édition p.110 et p.140
Leçons : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 240, 245.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathrm{I}} |x|^n \, \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

Définition 2

On note l'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x) \overline{g(x)} \rho(x) \, \mathrm{d}x$$

Proposition

L'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ est un espace de Hilbert. Les polynômes appartiennent à $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.
En particulier, il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$) deux à deux et tels que $\deg P_n = n$ (orthogonalisation de Gram-Schmidt). Cette famille s'appelle la *famille des polynômes orthogonaux* associés à la fonction poids ρ.

Théorème (Densité des polynômes orthogonaux)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.

Preuve :

But : Les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée. Il reste donc à montrer qu'elle est totale, donc que $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est dense dans $L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Or $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$, il faut donc montrer que

$$\mathrm{Vect}((P_n)_n)^\perp = 0$$

Mais, par construction de $(P_n)_n$, on a $\mathrm{Vect}((P_n)_n) = \mathrm{Vect}((X^n)_n)$. On veut donc montrer que $\mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = 0$.
En posant $g_n : x \to x^n$, cela revient à montrer :

Si $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ vérifie $\langle f, g_n \rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors $f = 0$.

Dans la suite, $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ et vérifie $\langle f, g_n \rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etape 1 :

Soit $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Soit φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que φ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad |f(x)|\,\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I (par définition pour ρ et $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ pour ρf^2), on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 :

On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x)\rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < a/2\}$.

Posons, pour $z \in B_a$ et $x \in \mathrm{I}$, $g(z, x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)$.
On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_a, \qquad F(z) = \int_{\mathrm{I}} g(z, x)\,\mathrm{d}x$$

Vérifions que cette fonction est bien définie :
En effet, on a $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}\right| = \mathrm{e}^{\mathcal{I}m(z)x} \leqslant \mathrm{e}^{|\mathcal{I}m(z)||x|} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}$
Donc, pour $z \in B_a$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que F vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
H1) Pour tout $z \in B_a$, l'application $x \to g(z, x)$ est intégrable (déjà vu)
H2) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $z \to g(z, x)$ est holomorphe (exponentielle)
H3) Pour tout $z \in B_a$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)}_{\text{indpt de } z \text{ et intg sur I}}$$

Donc F est bien holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$.

Etape 3 :

On calcule $F^{(n)}(0)$ pour montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ alors $f = 0$.

Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_a, \qquad F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en ayant posé $g_n : x \to x^n$, on obtient :

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0.

Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On déduit que $\widehat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} = 0$.
Comme φ est intégrable (vu à l'étape 1), l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$. Or, ρ est strictement positive donc $f = 0$ sur presque tout I.

■

Bonus

Pourquoi imposer une telle condition (d'écrasement) sur la fonction poids ?

Contre-exemple

On considère, sur $I =]0, +\infty[$, la fonction poids $\omega(x) = x^{-\ln(x)}$.
Montrons que les polynômes orthogonaux pour le poids ω ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \omega)$.
Considérons la fonction $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$.
Montrons que la fonction f est orthogonale à g_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pourtant $f \neq 0$).
En effet,

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle_\omega &= \int_0^{+\infty} x^{n-\ln(x)} \sin(2\pi \ln(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+u(n+1)} \sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u \qquad \boxed{u \leftrightarrow \ln(x)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t + (n+1)\pi)\,\mathrm{d}t \qquad \boxed{t \leftrightarrow u - (n+1)/2} \\
&= (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 \qquad \text{car l'intégrande est impaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale donc la famille des polynômes orthogonaux associés à ω non plus. Ce n'est pas une base hilbertienne.

Exemples de polynômes orthogonaux

— Polynômes de Hermite
On prend I$= \mathbb{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, ..., $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$

— Polynômes de Legendre
On prend I$= [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.
$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$, ..., $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$

Réponses à de possibles questions

1. D'où provient le théorème d'holomorphie sous le signe intégral ?
$\hookrightarrow$ [ZQ p.310] Si on se place sur un compact, c'est exactement la démo du théorème de dérivation sous le signe intégral (convergence dominée). Sinon, on se ramène au cas précédent et on utilise la formule de Cauchy.
2. Donner une famille de polynômes orthogonaux pour laquelle le théorème s'applique.
$\hookrightarrow$ Les polynômes de Hermite.

3. Donner la définition et une caractérisation d'une base hilbertienne.
   $\hookrightarrow$ [OA p.109] Une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'un Hilbert H qui soit orthogonale, normée et totale.
   On en donne une caractérisation avec les conditions suivantes qui sont équivalentes :
   — la famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.
   — pour tout $x \in H$, $x = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$.
   — pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$.
4. A partir de ce théorème, construire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
   $\hookrightarrow$ [OA p.112] L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est séparable, ses bases hilbertiennes sont donc dénombrables. On va prendre l'exemple des polynômes de Hermite et on considère :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R},\rho) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f\sqrt{\rho} \\ \dfrac{g}{\sqrt{\rho}} & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

   qui sont des isométries bijectives inverses l'une de l'autre. Si (P_n) sont les polynômes de Hermite, $(P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, on a largement le temps (5min pr introduire tout jusqu'au bus c'est bien) donc on le prends et on détaille tout de sorte que le bonus reste un bonus.
✓ Attention, dans le livre α et a sont les mêmes.
✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.
✓ Rappel : Un point d'accumulation x d'une partie A d'un espace topologique est un point tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon)\cap A \neq \{x\}$$

✓ N'a d'intérêt que si I non borné car sinon on a Weierstrass.
✓ Sert à diagonaliser des opérateurs autoadjoints compacts, résoudre des équations.