Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Référence : FGNAL1 : p.329 exo 7.8

On cherche ici à déterminer les formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème

L'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A \ : \ X \mapsto \mathrm{tr}(AX) \end{array} \right.$$
réalise un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Preuve :

On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
f est clairement linéaire, et les espaces sont de même dimension finie. Montrons donc l'injectivité de f.
Soit A telle que $f_A = 0$. On a alors, pour tous i_0, j_0 :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{tr}(AE_{i_0,j_0}) &= \sum_{i=1}^{n} (AE_{i_0,j_0})_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (E_{i_0,j_0})_{j,i} \\ &= a_{j_0,i_0} \end{aligned}$$

Finalement, $A = 0$. Donc f est injective donc bijective d'où l'isomorphisme. ■

Essayons maintenant, parmi toutes ces formes linéaires, de caractériser la plus connue, la *trace*.

Corollaire 1

Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $g(XY) = g(YX)$ pour toutes matrices X et Y. Alors
$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ g(X) = \lambda \mathrm{tr}(X).$$

Preuve :

D'après le théorème précédent, il existe donc une matrice A telle que $g(X) = \mathrm{tr}(AX)$.
L'hypothèse nous donne donc
$$\mathrm{tr}(AXY) = \mathrm{tr}(AYX).$$
Or les propriétés de la trace nous permettent d'écrire :
$$\mathrm{tr}(AYX) = \mathrm{tr}(XAY).$$
Finalement, on a
$$\mathrm{tr}((AX - XA)Y) = 0,$$
et ce pour tout matrice Y.
En réutilisant l'isomorphisme précédent, on a donc $AX = XA$, et comme il est connu que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties, A en est donc une. ■

Il est maintenant temps d'utiliser la correspondance forme linéaire $\leftrightarrow$ hyperplan.

Corollaire 2

Si $n \geqslant 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Preuve :

Soit donc H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit φ une[1] forme linéaire associée. Il existe donc une matrice A telle que pour toute matrice X, on ait $\varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$.
On cherche donc une matrice inversible, telle que $\mathrm{tr}(AX)$ soit nulle.

Pour simplifier le problème, notons r le rang de A. A est donc équivalente à J_r : $PAQ = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où P et Q sont inversibles.
On a donc, pour toute matrice X,

$$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(PJ_rQX) = \mathrm{tr}(J_rQXP).$$

Si on trouve Y inversible telle que $\mathrm{tr}(J_rY)$ soit de trace nulle, on a gagné (on pose $X = Q^{-1}YP^{-1}$ qui reste à la fois dans $GL_n(\mathbb{K})$ et dans l'hyperplan H car on aura alors $\mathrm{tr}(AX) = 0$).
Pour cela, on peut par exemple poser

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y est inversible ($\det Y = (-1)^{n+1}$), J_rY a sa diagonale nulle, donc sa trace aussi. ■

Corollaire 3

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre

1. $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AX + XA = B$.
2. $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AC + CA = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(BC) = 0$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. Simple calcul.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AC + CA = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(BC) &= \mathrm{tr}(AXC + XAC) = \mathrm{tr}(AXC) + \mathrm{tr}(XAC) \\ &= \mathrm{tr}(CAX) + \mathrm{tr}(ACX) = \mathrm{tr}((CA + AC)X) \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1. Interprétons les deux assertions.
L'application $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array} \right.$ est un endomorphisme.
1. équivaut à $B \in \mathrm{Im}h$.
En reprenant les notations du théorème, $F = f(\mathrm{Ker}h) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. La condition 2. s'écrit

$$\forall C \in \mathrm{Ker}h, \ f_C(B) = 0$$

En d'autres termes, 2. est équivalent à $B \in F^\circ$ orthogonal dual de F.
On a montré dans 1. $\Rightarrow$ 2. que $\mathrm{Im}h \subset F^\circ$. On a en fait égalité entre ces deux espaces car (utilisons que f est un isomorphisme)

$$\dim F^\circ = n^2 - \dim F = n^2 - \dim f(\mathrm{Ker}h) = n^2 - \dim \mathrm{Ker}h = \dim \mathrm{Im}h$$

Donc finalement $F^\circ \subset \mathrm{Im}h$ ie 2. $\Rightarrow$ 1.

1. On peut multiplier φ par n'importe quel scalaire non nul.

■

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, 9'35 en hyper lent.. rajouter centre + $\sim J_r$ (H2G2).
✓ Les formes linéaires permettent de caractériser analytiquement l'appartenance à un hyperplan.
✓ Pour montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est constitué des homothéties il faut y aller à la brute en utilisant que les $E_{i,j}$ forment une base.