Echantillonnage de Shannon

Laura Gay

Référence : Willem : Analyse harmonique réelle p. 126-128

Introduction : Les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier s'annule en dehors d'un intervalle compact $[-c, c]$ correspondent aux signaux à spectre borné. Ces fonctions jouent un rôle important dans les applications et possèdent des propriétés remarquables. Par dilatation, nous pouvons toujours nous ramener au cas où $c = \dfrac{1}{2}$.

Définition (*p. 51*)

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0\}$ "vanishing at infinity".
Cet ensemble est muni de $\|\cdot\|_\infty$. On montre (exercice p. 62) que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (par la deuxième définition).

Lemme 1 (*p. 120*)

Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et :

$$\|\hat{u}\|_\infty \leqslant \|u\|_1$$

Preuve du Lemme 1

Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\hat{u}(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \mathrm{d}x = \|u\|_1$$

donc $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$.
Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant vers u dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc $u - u_n \in L^1(\mathbb{R})$ et, en appliquant l'inégalité qu'on vient d'obtenir, on a :

$$\|\hat{u} - \widehat{u_n}\|_\infty \leqslant \|u - u_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\widehat{u_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Or $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (pour la $\|\cdot\|_\infty$) donc $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. ■

Définition

On définit :

$$BL^2 := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) \ / \ \operatorname{supp} \hat{u} \subseteq \mathbb{I}\right\} \text{ où } \mathbb{I} := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Il est muni du produit scalaire usuel $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$.

Lemme 2

BL^2 est un espace de Hilbert.

Preuve du Lemme 2

Pour montrer que BL^2 est complet, il suffit de prouver que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
Soit $(u_n)_n$ une suite de BL^2 convergeant vers u dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par continuité de la transformATION de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{u_n} \to \hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, donc en particulier dans $L^2(\Omega)$ où $\Omega := \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.
Par définition de BL^2, $\widehat{u_n}_{|\Omega} = 0$, donc $\hat{u}_{|\Omega} = 0$ et $u \in BL^2$. ■

Définition

On définit aussi le sinus-cardinal, fonction paire sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

Théorème (*Théorème d'échantillonnage - 1949*)

BL^2 vérifie les propriétés suivantes :

(i) Tout $u \in BL^2$ possède un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (i.e. u est p.p. égale à une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$) et $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2$.

(ii) La suite $(\operatorname{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2.

(iii) [Théorème d'échantillonnage de Shannon] Pour $u \in BL^2$,

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\operatorname{sinc}(x-k),$$

la série convergeant uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve du Théorème

(i) Soit $u \in BL^2$. Par définition, $\hat{u} \in L^2(\mathbb{I})$ donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{I})$ ($\mathbb{I}$ de mesure finie donc on a inclusion dans les L). $\hat{u} = 0$ en dehors de $\mathbb{I}$ donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$.
Par le **Lemme 1**, $\hat{\hat{u}} = u(-\cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ donc u a un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
Par inversion de Fourier dans L^2, on a aussi :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xy}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{I}} \hat{u}(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xy}\mathrm{d}y \qquad \text{p.p.}$$

On déduit aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'égalité de Plancherel que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|u(x)| \leqslant \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{I})} \times \lambda(\mathbb{I}) = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{I})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc

$$\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2$$

(ii) Posons $e_k(x) := \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx}\mathbb{1}_{\mathbb{I}}(x) \in L^2(\mathbb{R})$

On remarque que $\widehat{e_k} = \operatorname{sinc}(\cdot - k)$.
En effet, $\widehat{e_k}(k) = \int_{\mathbb{R}} e_k(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xk}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{I}} \mathrm{e}^0\mathrm{d}x = 1 = \operatorname{sinc}(0)$
Et, si $y \neq k$:

$$\begin{aligned}
\widehat{e_k}(y) &= \int_{\mathbb{R}} e_k(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xy}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{I}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x(k-y)}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}\pi(k-y)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x(k-y)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(k-y)}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\frac{1}{2}(k-y)} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\frac{1}{2}(k-y)}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi(k-y)}\left(2\mathrm{i}\sin(\pi(k-y))\right) = \operatorname{sinc}(k-y) = \operatorname{sinc}(y-k)
\end{aligned}$$

Donc, déjà, $\widehat{\operatorname{sinc}(\cdot - k)} = \widehat{\widehat{e_k}} = e_k(-\cdot)$ nulle en dehors de $\mathbb{I}$. Donc $\operatorname{sinc}(\cdot - k) \in BL^2$.
De plus, par conservation du produit scalaire,

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x-j)\ \operatorname{sinc}(x-k)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e_j\overline{e_k} = \int_{\mathbb{I}} e_j\overline{e_k} = \delta_{j,k}$$

La suite $(\operatorname{sinc}(.-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.

Pour montrer que cette suite est une base hilbertienne de BL^2, il suffit désormais de montrer qu'elle est totale, donc de montrer que son orthogonal dans BL^2 est réduit à $\{0\}$.
Soit donc $u \in BL^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\ \mathrm{sinc}(x-k)\mathrm{d}x = 0$$

On a alors :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} u\widehat{e_k} = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}e_k = \int_{\mathbb{I}} \hat{u}e_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Donc $\hat{u}(y) = 0$ presque partout sur $\mathbb{I}$ car $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Par définition de BL^2, $\hat{u} = 0$ donc $u = 0$ et $(\mathrm{sinc}(.-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale.

(iii) Par (ii), on a, pour $u \in BL^2$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u,\ \mathrm{sinc}(\cdot - k)\rangle\ \mathrm{sinc}(x-k)$$

et avec la base hilbertienne, la convergence est L^2.
On pose $v_n(x) = u(x) - \sum_{k=-n}^{n} \langle u,\ \mathrm{sinc}(\cdot - k)\rangle\ \mathrm{sinc}(x-k)$.
De plus, comme $v_n \in BL^2$, on peut appliquer l'inégalité de (i), $\|v_n\|_\infty \leqslant \|v_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc la convergence est uniforme.
En particulier, pour $x = j \in \mathbb{Z}$, on a, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k \neq j$ $\mathrm{sinc}(j-k) = \dfrac{\sin(\pi(j-k)}{\pi(j-k)} = 0$, donc :

$$u(j) = \langle u,\ \mathrm{sinc}(\cdot - j)\rangle$$

D'où le résultat recherché. ■

Corollaire

Si $u, v \in BL^2$, on a $\|u\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^2$

Notes :

✓ **A l'oral**, bla
✓ Tout sous-espace fermé d'un espace complet est complet.
♣ Claude Shannon (1916 - 2001) est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est le père fondateur de la théorie de l'information.

Rappels sur la Transformée de Fourier

Déf : la transformée de Fourier est tout d'abord définie pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ classiquement, pour $y \in \mathbb{R}^n$, par

$$\hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xy} \mathrm{d}x$$

Elle est bien définie par théorème de comparaison.

Déf : L'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : &= \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\} \\ &= \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| = 0\} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$

Thm : [Isomorphisme de Fourier] La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$ est une bijection linéaire.

Déf : Par densité, on définit $\mathcal{A} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$.

Déf : Avec le théorème de prolongement, il existe un unique prolongement continu de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$$

Rq : Il faut faire très attention et ne pas confondre $\mathcal{F}(u)$ et $\hat{u}$. En effet, cela n'est vrai que lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour plus de praticité (et grâce à la proposition ci-dessous), on notera $\hat{u}$ tout le temps.

Prop : Lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(u) = \hat{u}$

	Dans L^1	Dans $\mathcal{S}$	Dans L^2
Propriétés de la transformée	$\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$	Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	
Egalité de Plancherel		Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\\|u\\|_2 = \\|\hat{u}\\|_2$	Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\\|u\\|_2 = \\|\mathcal{F}u\\|_2$
Continuité de la transformATION de Fourier	Oui, car $\\|\hat{u}\\|_\infty \leqslant \\|u\\|_1$	Oui pour $\mathcal{A}$, par Plancherel	Oui, par prolongement
Inversion		$\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$ par thm isomorphisme de Fourier	$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = u(-\cdot)$
	Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}$	Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}$	Si $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} u\mathcal{F}(v)$
Autre	*[Thm de Riemann-Lebesgue]* : Lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$		*[Conservation du produit scalaire]* : Si $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$.

Rappels sur les théorèmes de densité

Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense dans}}{\subset} \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \text{ ici les densités sont pour } \|\cdot\|_p$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense dans}}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\mathcal{D}(\Omega) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\Omega, \mu)$$

$$\mathcal{K}(\Omega) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\Omega, \lambda) \text{ et } \mathcal{K}(\mathbb{R}) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\mathbb{R}, \lambda)$$

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^p(\mathbb{R}, \lambda) \text{ et } \mathcal{E}(\Omega) \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^{p \text{ ou } \infty}(\Omega, \mu)$$

où $\mathcal{E}$ désigne les fonctions étagées de L^p ;
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{C}_b^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ / \text{ supp } u \text{ est compact}\}$; $\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \ / \text{ supp } u \text{ est compact}\}$
$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{K}(\Omega) \subset L^\infty$

Autre résultat important : $L^1 \cap L^2 \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^1$ et $L^1 \cap L^2 \overset{\text{dense dans}}{\subset} L^2$