Ellipsoïde de John-Loewner

Référence : FGNAL3 p. 229 + p. 222

Notations :
- Q est l'ensemble des formes quadratiques de $\mathbb{R}^n$.
- Q^+ est l'ensemble des formes quadratiques positives de $\mathbb{R}^n$.
- Q^{++} est l'ensemble des formes quadratiques définies positives de $\mathbb{R}^n$.
- Si $q \in Q$, on note $D(q)$ le déterminant d'une matrice associée à q (on montre dans le **Lemme 1** qu'il est indépendant de la base choisie).

Théorème

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Un ellipsoïde plein centré en O a une équation du type $q(x) \leqslant 1$ où $q \in Q^{++}$.
On note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leqslant 1\}$ l'ellipsoïde associé à $q \in Q^{++}$.
But : montrer qu'il existe une unique forme quadratique $q \in Q^{++}$ tq $\mathcal{E}_q$ soit de volume minimal et contienne K.

Lemme 1

Le volume de $\mathcal{E}_q$ est $V_q = \dfrac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$, où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Preuve du Lemme 1

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. avec les $a_i > 0$ car q est définie positive.

On a donc
$$V_q = \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

On effectue le changement de variables $t_i = \sqrt{a_i} x_i$. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien $\dfrac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$, et on obtient donc
$$V_q = \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \leqslant 1} \frac{\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}.$$

Soit S la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. S est symétrique réelle. On peut donc la diagonaliser i.e. $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)^t P$. (ici P est la matrice de passage de notre base quelconque à $\mathcal{B}$).
Donc $\det(S) = \det(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_1 \dots a_n$. Donc, $D(q)$ est indépendant de la base orthonormale choisie, et vaut $D(q) = a_1 \dots a_n$.
Donc $V_q = \dfrac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$. ■

Preuve du Théorème

Par le **Lemme 1**, le problème consiste maintenant à montrer qu'il existe une unique forme quadratique définie positive $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal, et telle que $\forall x \in K,\ q(x) \leqslant 1$.
On munit l'ensemble des formes quadratiques Q de la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)| \,.$$

On pose $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ \mid \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On remarque que si $q \in \mathcal{A}$ est définie positive, alors $K \subset \mathcal{E}_q$. On va donc chercher à maximiser $D(q)$ sur ce domaine.
Pour cela, on montre que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

- $\mathcal{A}$ est convexe : (servira pour l'unicité)
  Si q et q' sont dans $\mathcal{A}$, et $\lambda \in [0,1]$:
  — $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda q + (1-\lambda q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geqslant 0$. (somme de termes positifs)
  — $\forall x \in K,\ (\lambda q + (1-\lambda) q')(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda \leqslant 1$.
  Donc $\lambda q + (1-\lambda) q' \in \mathcal{A}$

- $\mathcal{A}$ est fermé :
  Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ qui converge dans Q (i.e. pour N) vers q. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |q_n(x) - q(x)| \leqslant N(q_n - q) \|x\|^2 \,.$$

  Par suite : $q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \geqslant 0$ et $q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \leqslant 1$.
  Donc $q \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est borné :
  K est d'intérieur non vide, donc $\exists a \in K$ et $r > 0$ tel que K contienne la boule centrée en a de rayon r.
  Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leqslant r$, alors $a + x \in K$, et donc $q(a+x) \leqslant 1$. D'autre part, $q(-a) = q(a) \leqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sqrt{q(x)} &= \sqrt{q(x+a-a)} \\ &\leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \qquad \text{par Minkowski} \\ &\leqslant 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

  Donc $q(x) \leqslant 4$.
  Si $\|x\| \leqslant 1$, alors $\|rx\| \leqslant r$. Donc on a

$$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}$$

  Donc, en prenant le sup à gauche, $N(q) \leqslant \dfrac{4}{r^2}$, et donc $\mathcal{A}$ est borné.

$\hookrightarrow$ Donc $\mathcal{A}$ est compact.

- $\mathcal{A}$ est non vide :
  K est compact, donc il est borné : soit $M > 0$ tel que $\forall x \in K,\ \|x\| \leqslant M$.
  En posant $q_1(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$, on a $q_1 \in Q^+$, et pour tout $x \in K$, $q_1(x) \leqslant 1$.
  Donc $q_1 \in \mathcal{A}$, et donc $\mathcal{A}$ est non vide.

Comme det est continue, $q \mapsto D(q)$ l'est aussi sur le compact $\mathcal{A}$. Elle atteint son maximum sur $\mathcal{A}$, en une certaine forme quadratique $q_0 \in \mathcal{A}$.
De plus, on a vu que $q_1 \in \mathcal{A}$, et $q_1 \in Q^{++}$, donc $D(q_0) \geqslant D(q_1) = \dfrac{1}{M^{2n}} > 0$ Donc $q_0 \in Q^{++}$. Nous venons de prouver qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal qui contient K.

Il reste maintenant à montrer l'unicité.
Supposons qu'il existe $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$.
Notons S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Par convexité de $\mathcal{A}$, $\dfrac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$. Par le **Lemme 2**, on a :

$$D\left(\frac{1}{2}(q+q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right) > (\det S)^{1/2} (\det S_0)^{1/2} = D(q_0)$$

Ceci contredit la maximalité de $D(q_0)$. D'où l'unicité. ■

Lemme 2 (Convexité logarithmique)

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in R^+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

De plus, si $A \neq B$, alors l'inégalité est stricte.

Preuve du Lemme 2

Par théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Donc

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta$$

et

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D).$$

$$\begin{aligned} \text{On veut montrer que :} \quad & \det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta \\ \text{ie :} \quad & \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta \\ \text{ie :} \quad & \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geqslant \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i \end{aligned}$$

Or, par concavité de ln, on a, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:

$$\ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geqslant \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$$

On a le résultat en sommant sur i.

Si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1.

Donc, si $\alpha \in]0, 1[$, la stricte concavité de ln donne une inégalité stricte. ■

Réponses à de possibles questions

1. Voir ce qui se passe dans le cas dégénéré (où le convexe est d'intérieur vide, un segment par exemple). $\hookrightarrow$ [ ]

Notes :

✓ **A l'oral**, on fait le Lemme qui nous arrange selon le temps. Attention à bien justifier le changement de variables au début quand on prend une base orthonormée (Cyril).

✓ Attention, quand on cherche une base q-orthogonale, on sait juste que ${}^tPAP$ sera diagonale mais que a priori ${}^tP \neq P^{-1}$. (même si q est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale avec ${}^tP = P^{-1}$, à ce niveau nous ne l'avons pas encore.)

✓ Le résultat reste vrai dans un e.v. réel de dim finie quelconque, avec la même démonstration (il suffit de munir E d'une structure euclidienne quelconque).

✓ Un corollaire important montre qu'un sous-groupe compact du groupe linéaire est forcément un sous-groupe du groupe orthogonal pour une structure euclidienne de E.

✓ la matrice de q dans n'importe quelle base -même non orthonormale- est toujours symétrique .

✓ Rappel : inégalité de Minkowski. Si q est positive alors $\forall x, y$, $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

✓ Rappel : Dans $\mathbb{R}^n$, fermé borné $\Leftrightarrow$ compact.

✓ Rappel : Dans un espace séparé (2 points disjoints ont des voisinages disjoints), tout compact est fermé. Dans un espace métrique, il est de plus (tout espace métrique est séparé) borné.

✓ En fait, il y a deux ellipsoïdes de John et Loewner. La première est celle dont on vient de démontrer l'existence (Loewner, qui ne l'a jamais publié). La deuxième (John 1948) est une ellipsoïde de volume maximal contenu dans un convexe compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Elles permettent d'approximer les convexes

compacts de $\mathbb{R}^n$ (en utilisant la notion de polarité, dans le cas des convexes compacts, ces ellipsoïdes peuvent se déduire l'un de l'autre).
NB : Au départ, en 1938, Behrend montre que $\forall$ convexe compact d'intérieur $\neq \emptyset$, $\exists!$ ellipse inscrite d'aire maximale et $\exists!$ ellipse circonscrite d'aire minimale. Ces résultats ont ensuite été généralisés à $\mathbb{R}^n$ par John et Loewner.
♣ Charles Loewner (1893 – 1968) est un mathématicien d'origine tchèque. Son premier résultat scientifique fut la démonstration, en 1923, du premier cas non trivial de la conjecture de Bieberbach.
♣ Fritz John (1910 – 1994) est un mathématicien allemand spécialisé dans les équations aux dérivées partielles. Ces travaux concernent la transformée de Radon et il est connu pour l'équation de John.