Equation de la chaleur

Référence : FGNAN4 p.49
Leçons : 222, 246.

Théorème

Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Il existe une unique solution u sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ u(0,x) = u_0(x)}$$

où u est 2π-périodique par rapport à la variable x (et ce pour tout $t \geqslant 0$), continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Preuve :

Analyse : Soit u une solution du problème posé. Pour $t > 0$ fixé, $u_t : x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et de classe C^∞ donc somme de sa série de Fourier d'après le **théorème de Dirichlet** :

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \mathrm{e}^{inx} \text{ avec } c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x.$$

Montrons que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ s'obtient par dérivation formelle par rapport à t de cette expression. Comme pour u, on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c_n}(t)\mathrm{e}^{inx} \text{ avec } \widetilde{c_n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x.$$

La fonction u étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on en déduit par le **théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre** que l'application $c_n : t \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t,x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x$ est de classe C^1 (on intègre sur un compact) et $\widetilde{c_n}(t) = c_n'(t)$ de sorte que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t)\mathrm{e}^{inx}.$$

De même, la fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est somme de sa série de Fourier et, par double IPP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t)\mathrm{e}^{inx}.$$

Ainsi, le problème s'écrit :

$$\forall t > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))\mathrm{e}^{inx}.$$

Or, à t fixé, cette série est normalement convergente car [1] somme de deux séries CVN (Dirichlet pour les

1. On peut aussi dire série de Fourier de 0 qui est $\mathcal{C}^\infty$

deux) donc on peut inverser :

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n'(t)+n^2c_n(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_0x}\mathrm{d}x\\&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n'(t)+n^2c_n(t))\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n_0)x}\mathrm{d}x}_{=0 \text{ sauf si } n=n_0}\\&= 2\pi(c_{n_0}'(t)+n^2c_{n_0}(t))\end{aligned}$$

où $n_0\in\mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $t>0$, $c_n'(t)+n^2c_n(t)=0$ de sorte [2] qu'il existe $\alpha_n\in\mathbb{C}$ tel que $c_n(t)=\alpha_n\mathrm{e}^{-n^2t}$.

Il reste à déterminer α_n. Pour cela on considère la série de Fourier de u_0 que l'on note $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. u_0 vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet donc est bien somme de sa série de Fourier. Le **théorème de Parseval** appliqué à u_0-u_t donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n^0-c_n(t)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_0(x)-u_t(x)|^2\mathrm{d}x.$$

A n fixé, on a donc $|C_n^0-c_n(t)|^2\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|u_0(x)-u_t(x)|^2\mathrm{d}x$.
Or, cette intégrale tend vers 0 quand t tend vers 0 par le **théorème de convergence dominée**. En effet,
- $(t,x)\in[0,1]\times[0,2\pi]\longmapsto|u_0(x)-u_t(x)|^2=|u(0,x)-u(t,x)|^2$ est bornée sur le compact $[0,1]\times[0,2\pi]$ par continuité de u donc majorée par une fonction intégrable sur $[0,2\pi]$ et indépendante de t
- pour tout $x\in[0,2\pi]$, $|u_0(x)-u_t(x)|\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$

En passant à la limite on obtient finalement $|C_n^0-\alpha_n|^2=0$ i.e $\alpha_n=C_n^0$.
Donc si u est solution du problème $u(t,x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, où les C_n^0 sont les coefficients de Fourier de u_0.

Synthèse : Montrons que $u:(t,x)\longmapsto\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ convient.

Tout d'abord, cette série converge normalement par comparaison avec la série $\sum|C_n^0|$ qui converge en vertu du théorème de convergence normale. u est donc bien définie et continue puisque chaque fonction $(t,x)\longmapsto C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est continue + CVN.
Pour tout $t>0$, $x\longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique.
La dérivation formelle de la série définissant u donne pour $k,l\in\mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k\partial x^l}(C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})=(-1)^k\mathrm{i}^ln^{2k+l}C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Soit $t_0>0$. Comme les C_n^0 sont bornés [3] par $K=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|u_0|$, cette série est normalement convergente sur $]t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$ puisque

$$\left|(-1)^k\mathrm{i}^ln^{2k+l}C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right|\leqslant Kn^{2k+l}\mathrm{e}^{-n^2t_0}=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, u admet des dérivées partielles à tout ordre donc

$$\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{i}^ln^{2k+l}C_n^0\mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2. On pouvait aussi conclure en disant que le terme de droite est une série trigonométrique uniformément convergente (car normalement convergente) donc coïncide avec sa série de Fourier et est continue sur $\mathbb{R}$ et invoquer le fait que deux fonctions continues sont égales s.s.i elles ont même coefficients de Fourier

3. Il faut écrire $\displaystyle\int_0^{2\pi}u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}C_k^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)x}\mathrm{d}x=2\pi C_n^0$

et u est de classe C^∞ sur $]t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et u vérifie bien l'équation aux dérivées partielles considérées.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}$ où les C_n^0 sont les coefficients de Fourier de u_0 est l'unique solution du problème.

■

Notes :

✓ **A l'oral**,