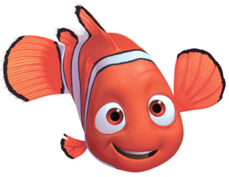

Théorème des évenements rares de Poisson

Laura GAY d'après P. DERENNES et F. LEMONNIER

Référence : OUVRARD 1 p.226 et OUVRARD 2 p.311

Théorème 1 (*Théorème de Poisson*)

On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$,
Alors on a

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

Preuve :

On va montrer à la main que $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.
Comme $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, on a : $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, pour $n \geqslant k$:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}$$

Mais on a

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}[\lambda + o(1)]^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$$

D'autre part, on sait que

$$\left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} = \exp\left[(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[(n-k)\left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Par conséquent, $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, d'où $S_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{P}(\lambda)$. ■

Le **Théorème 1** se généralise de la manière suivante [1] :

Théorème 2 (*Théorème des évènements rares de Poisson - 1837*)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1 \leqslant j \leqslant M_n\}$ d'évènements indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note

$$S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}.$$

On suppose que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow +\infty$ (cette hypothèse ne sert à rien !) et que

$$\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0 \quad (*)$$

Alors on a

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

Preuve :

On utilise encore le théorème de Lévy. Par indépendance des $A_{n,j}$, $1 \leqslant j \leqslant M_n$, on a , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{\mathbb{1}_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} [p_{n,j} \exp(it \times 1) + (1 - p_{n,j}) \exp(it \times 0)] = \prod_{j=1}^{M_n} [1 + p_{n,j}(\exp(it) - 1)]$$

Si Log est la détermination principale du logarithme complexe, il résulte de la formule de Taylor entre 0 et 1 appliqué à $t \mapsto \mathrm{Log}(1 + tz)$ avec reste intégral à l'ordre 2 [2] que pour tout z tel que $|z| < 1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(1+z) &= \mathrm{Log}1 + 1 \times z \times \frac{1}{1} + \int_1^{1+z} \frac{(1+z-t)^1}{1!} \frac{-1}{t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= z + \int_0^1 (1 + z - 1 - zu) \frac{-1}{(1+zu)^2} z\, \mathrm{d}u \\
&= z - z^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+zu)^2}\, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Notons $z = \exp(it) - 1$.
Comme $\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} |p_{n,j} z| < \frac{1}{2}$.
Pour tout $n \geqslant N$ on a alors

$$\mathrm{Log}\varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{M_n} \mathrm{Log}\,[1 + p_{n,j} z] = z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1 + up_{n,j} z)^2} du.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $u \in [0, 1]$,

$$|1 + up_{n,j} z| \geqslant 1 - |p_{n,j} z| \geqslant 1 - 1/2 = \frac{1}{2}$$

On a donc, pour tout $n \geqslant N$,

1. On parle de généralisation car le Théorème 1 est un cas particulier du Théorème 2. En effet, avec le Théorème de 2 on retrouve le Théorème 1 en prenant : $M_n = n$, $p_{n,j} = p_n$ pour tout j. Alors $\sum_{j=1}^{n} p_{n,j} = np_n$ donc $np_n \to \lambda$ et $X_n = S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ (fonctions caractéristiques) et on est ainsi revenu au Théorème 1.
2. Gourdon p 75

$$\left|\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{|1-u|}{|1+p_{n,j}zu|^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 4 \int_0^1 (1-u)\,\mathrm{d}u = 2\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2$$

$$\leqslant 2\left(\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}\right)$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2}\,\mathrm{d}u = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log}\varphi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} z\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda z.$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)\right)$ (cf note) d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ (théorème de Lévy).

■

Exemple

Dans une classe de 400 élèves, le nombre d'étudiants ayant leur anniversaire le jour de l'examen final a approximativement une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{400}{365} \approx 1,096$.

Notes :

✓ **A l'oral**, bla.
✓ Théorème de Lévy :

$$\{\forall t\in\mathbb{R} : \varphi_n(t)\to\varphi(t)\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right\}$$

✓ Si X et Y sont deux va indépendantes. Alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.
✓ On a toujours $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ (cf écrit ou passer en formel) mais $\operatorname{Log}(\exp z)$ n'est vrai QUE lorsque $|z-1|<1$.
✓ La preuve du **Théorème 2** présente de nombreux inconvénients. Tout d'abord, elle "cache" quelques subtilités sur lesquelles il est facile de se faire piéger : utilisation du logarithme complexe, formule de Taylor avec reste intégral... Par ailleurs, elle utilise le théorème de Lévy qui est un résultat non trivial. Enfin, cette preuve ne donne aucune information sur la vitesse de convergence.
✓ On peut fait le **Théorème 1** en utilisant Lévy. Cependant, utiliser Lévy pour montrer une convergence en loi qui se montre directement en regardant les probabilités de chaque atome, c'est un peu exagéré. Surtout quand Lévy demande une page et demi de calculs dans le bouquin et que la méthode directe demande trois lignes de calculs. C'est important de savoir qu'on n'a pas besoin de Lévy pour montrer ça.
✓ On parle d'événements rares car $\max p_{n,j} \to 0$ donc on est face à des petites probabilités. Le théorème des évènements rares de Poisson tire son nom du fait qu'il montre qu'un phénomène aléatoire qui peut se représenter comme une superposition évènements rares (c'est à dire évènements de petites probabilité, au sens des conditions du théorème) et indépendants, suit approximativement une loi de Poisson.
♣ Siméon Poisson (1781 - 1840) est un mathématicien, géomètre et physicien français. Sa contribution la plus essentielle concerne l'électricité et le magnétisme qu'il contribua à fonder mais il eut également une influence en astronomie, notamment sur l'attraction des planètes. En mathématique, ses travaux les plus importants portent sur la série sur les intégrales définies, sur les séries de Fourier, les intégrales de Fourier, sur le calcul des variations, sur la probabilité des moindres résultats des observations.