Exponentielle et séries formelles

Référence : Zavidovique Max de Maths p.60

Lemme

Soit $f(X) = \sum_{n\geqslant 1} a_n X^n$ une série formelle telle que $a_1 \neq 0$. Alors il existe une unique série formelle $g(X) = \sum_{n\geqslant 1} b_n X^n$ vérifiant

$$g \circ f(X) = f \circ g(X) = X$$

Preuve :

On écrit la composée :

$$g \circ f(X) = \sum_{n\geqslant 1} b_n (f(X))^n = \sum_{n\geqslant 1} b_n \left(\sum_{n\geqslant 1} a_n X^n \right)^n$$

Mais le terme $\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n X^n \right)^n$ est un produit de Cauchy de n séries formelles. On peut donc le réécrire

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \right)}_{c_{n,k}} X^k$$

et comme chaque $i_j \geqslant 1$ on peut encore écrire ça $\sum_{k\geqslant n} c_{n,k} X^k$.

De plus, $c_{n,n} = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} = a_1 \cdots a_1 = a_1^n \neq 0$ (une seule possibilité $i_1 = \cdots = i_n = 1$ donc un seul terme dans la somme). Cela est vrai pour tout n. ■

Proposition 1

Preuve :

■

Notes :

✓ **A l'oral**,

✓