

Théorème des extremas liés

Camille FRANCINI et Laura GAY

Référence : GOURDON : Analyse p. 317 et 327

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , et $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On définit

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}.$$

Idée : maximiser (ou minimiser) f sur un sous-ensemble de U de la forme de Γ .

Théorème (Théorème des extremas liés de Lagrange)

Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a).$$

Preuve :

1. Soit $s = n - r$. On peut identifier \mathbb{R}^n à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit donc les éléments de \mathbb{R}^n comme (x, y) où $x = (x_1, \dots, x_s)$ et $y = (y_1, \dots, y_r)$.
Posons $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$.
Déjà, $r \leq n$ car les formes linéaires $Dg_i(a)$ forment une famille libre et la dimension de l'espace dual de \mathbb{R}^n est n . De plus, si $r = n$, le théorème devient évident car les $Dg_i(a)$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.
On peut donc supposer que $r < n$, ie $s \geq 1$.

2. Les formes linéaires $(Dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ forment une famille libre, ainsi la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang r ¹.

On peut donc² en extraire une sous-matrice $r \times r$ inversible. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que :

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0$$

Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \dots, g_r)$ par : $D_y g(a)$ est inversible.

3. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans \mathbb{R}^s , un voisinage ouvert Ω de $a(\alpha, \beta)$ dans \mathbb{R}^n et une fonction de classe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : U' \rightarrow \mathbb{R}^r$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$(x \in U', (x, y) \in \Omega \text{ et } g(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = \varphi(x))$$

En d'autres termes, sur un voisinage de a , les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Comme $a \in \Gamma$, on a $\beta = \varphi(\alpha)$

4. Posons $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_n) : x \in U' \subset \mathbb{R}^s \mapsto (x, \varphi(x))$. Alors $\psi(x) \in \Gamma$ par le TFI. Posons également, sur U' , $h = f \circ \psi$.

1. car r lignes donc au plus r et les $Dg_i(a)$ forment une famille indépendante. Or les $Dg_i(a)$ sont une combinaison linéaire des dérivées partielles. Supposons par l'absurde que les r lignes soient liées. Avec les deux combinaisons linéaires combinées (ahah) on arrive à une absurdité.

2. cf Debeaumarché

Comme $h(\alpha) = f(a)$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a). Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$,

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

En remarquant que $\forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ et que $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$. Et comme $a = \psi(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = 0$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur U' donc pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$. Donc, par un calcul similaire à celui du dessus, pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0$$

Si on considère donc la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

Les s premiers vecteurs colonnes de M s'expriment, d'après les deux formules aux dérivées partielles ci-dessus, linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes, donc $\text{rg}(M) \leq r$. Ainsi les $r+1$ lignes de M forment une famille liée.³

Ceci entraîne l'existence de réels μ_0, \dots, μ_r non tous nuls tels que :

$$\mu_0 Df(a) + \mu_1 Dg_1(a) + \cdots + \mu_r Dg_r(a) = 0$$

Comme la famille $(Dg_i(a))_i$ est libre, $\mu_0 \neq 0$ donc en posant $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$ pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on obtient

$$Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a).$$

■

Notes :

✓ La famille $(Dg_i(a))$ étant libre, les multiplicateurs de Lagrange λ_i sont uniques.

♣ Joseph, Comte de LAGRANGE (1736 - 1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome italien. Il passa trente ans dans le Piémont, puis vingt-et-un ans à Berlin, et le restant de ses jours à Paris. Dans une lettre adressée à Euler (plus grand mathématicien de l'époque), il jette les bases du calcul variationnel. Cet échange est le début d'une longue correspondance entre les deux hommes. Napoléon Ier lui montra son estime toute particulière en le nommant membre du Sénat conservateur avec Monge et Laplace.

3. Plus précisément, ça vient de $\text{rg}({}^t M) = \text{rg}(M)$, le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes de M