Théorème des extremas liés

Référence : Gourdon : Analyse p. 317 et 327

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \ldots, g_r \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Idée : maximiser (ou minimiser) f sur un sous-ensemble de U de la forme de Γ.

Théorème (Théorème des extremas liés de Lagrange)

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $\mathrm{D}g_1(a), \ldots, \mathrm{D}g_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

Preuve :

1. Soit $s = n - r$. On peut identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit donc les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme (x, y) où $x = (x_1, \ldots, x_s)$ et $y = (y_1, \ldots, y_r)$.
   Posons $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$.
   Déjà, $r \leqslant n$ car les formes linéaires $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille libre et la dimension de l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ est n.
   De plus, si $r = n$, le théorème devient évident car les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.
   On peut donc supposer que $r < n$, ie $s \geqslant 1$.

2. Les formes linéaires $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une famille libre, ainsi la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

   est de rang r [1].
   On peut donc [2] en extraire une sous-matrice $r \times r$ inversible. Quitte a changer le nom des variables, on peut supposer que :

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \neq 0$$

   Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \ldots, g_r)$ par : $D_y g(a)$ est inversible.

3. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a)(\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction de classe $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$(x \in U', (x, y) \in \Omega \text{ et } g(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = \varphi(x))$$

   En d'autre termes, sur un voisinage de a, les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Comme $a \in \Gamma$, on a $\beta = \varphi(\alpha)$

1. car r lignes donc au plus r et les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille indépendantes. Or les $\mathrm{D}g_i(a)$ sont une combinaison linéaire des dérivées partielles. Supposons par l'absurde que les r lignes soient liées. Avec les deux combinaisons linéaires combinées (ahah) on arrive à une absurdité.
2. cf Debeaumarché

4. Posons $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_n) : x \in U' \subset \mathbb{R}^s \mapsto (x, \varphi(x))$. Alors $\psi(x) \in \Gamma$ par le TFI. Posons également, sur U', $h = f \circ \psi$.
Comme $h(\alpha) = f(a)$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a).
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$,

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha))\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha))\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

En remarquant que $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ et que $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\dfrac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$. Et comme $a = \psi(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = 0$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur U' donc pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$. Donc, par un calcul similaire à celui du dessus, pour $i \in [\![1, s]\!]$:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0$$

Si on considère donc la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

Les s premiers vecteurs colonnes de M s'expriment, d'après les deux formules aux dérivées partielles ci-dessus, linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes, donc $\mathrm{rg}(M) \leqslant r$. Ainsi les $r+1$ lignes de M forment une famille liée. [3]
Ceci entraine l'existence de réels $\mu_0, \dots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\mu_0 \mathrm{D}f(a) + \mu_1 \mathrm{D}g_1(a) + \cdots + \mu_r \mathrm{D}g_r(a) = 0$$

Comme la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_i$ est libre, $\mu_0 \neq 0$ donc en posant $\lambda_i = -\dfrac{\mu_i}{\mu_0}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, on obtient

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

■

Théorème (Théorème des fonctions implicites)

(Rouvière) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, (a, b) un point de U, et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^r)$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $\mathrm{D}_y f(a, b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible, i.e $\det D_y f(a, b) \neq 0$.
Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V (voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^s$), W (voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^r$), avec $V \times W \subset U$, et une unique application $\varphi :\ V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus, $\mathrm{D}_y f(x, y)$ inversible pour tout $(x, y) \in V \times W$.

3. Plus précisément, ça vient de $\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M)$, le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes de M

Réponses à de possibles questions

1. Autre démonstration des extrema liés avec les sous-variétés ? (et savoir donner les détails)
   ↪ [Avez]
2. Application ?
   ↪ [GOU] p.319 inégalité arithmético-géométrique ... à savoir faire ! ! !

Notes :

✓ **A l'oral**, pile poil le temps. 14'47 en normal avec un soupçon d'hésitation : bien penser qu'en y c'est r (XSYR). Il faut savoir par coeur la formule de dérivée de la composée ! ! ! 14'02 une seconde fois.
✓ (Cyril) Bien détailler le calcul des dérivées partielles.
✓ N'oublions pas l'hypothèse cruciale : $a \in \Gamma$!
✓ La famille $(\mathrm{D}g_i(a))$ étant libre, les multiplicateurs de Lagrange λ_i sont uniques.
✓ La condition U ouvert est essentielle, sinon on aurait $\mathrm{D}f(a) = 0$ et la conclusion du théorème n'aurait aucun sens (POURQUOI ?) ! A l'inverse, Γ n'a aucune raison d'être ouvert !
✓ Pour justifier le dual de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'on prend $\mathbb{R}^n$ munit de son produit scalaire standard. C'est un espace de Hilbert dans $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$. On peut même rajouter que les $\mathrm{d}x_i$ forment la base duale de $(\mathbb{R}^n)^*$.
✓ Note orthographique importante de $\mathscr{M}$onsieur $\mathscr{L}$emonnier : On peut aussi écrire "extremums" ou "extrémums", mais pas "extréma", "extremas" ou "extrémas".
♣ Joseph, Comte de LAGRANGE (1736 - 1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome italien. Il passa trente ans dans le Piémont, puis vingt-et-un ans à Berlin, et le restant de ses jours à Paris. Dans une lettre adressée à Euler (plus grand mathématicien de l'époque), il jette les bases du calcul variationnel. Cet échange est le début d'une longue correspondance entre les deux hommes. Napoléon Ier lui montra son estime toute particulière en le nommant membre du Sénat conservateur avec Monge et Laplace.