Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Référence : Zuily-Quéffelec : p. 270 Section VIII.I.4.e
Leçons : 201, 202, 205, 208, 228.

Théorème
L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty\right)$.

Preuve :

Posons $B = A^c$ l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point de $[0,1]$.
Comme $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ est un espace de Banach, on va utiliser le lemme de Baire pour montrer $\overline{A} = E$.
Plus précisément, on va exhiber une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est d'intérieur vide ;
- $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Alors on aura montré que B est d'intérieur vide [1] dans E.
On pose $F_n = \{f \in E \mid \exists x \in I, \forall y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$, où I désigne l'intervalle $[0,1]$.

Étape 1 : Mq $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Soit $f \in B$, alors f est dérivable en au moins un point $x_0 \in I$.
Ainsi la quantité $\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}$ est bornée quand $y \to x_0$.
Et f étant continue sur I, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall y \in I, \left|\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}\right| \leqslant N$ et donc $f \in F_N$.
Ainsi, $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Étape 2 : Mq pour $n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite dans F_n qui converge vers [2] $f \in E$.
Comme les f_k sont dans F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in I, \forall y \in I, |f_k(x_k) - f_k(y)| \leqslant n\,|x_k - y| \tag{0.1}$$

Et comme I est compact, il existe une extraction $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x_0 \in I$.
L'idée est de passer à la limite dans (**??**). Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x_0)\right| \leqslant \underbrace{\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f\left(x_{\varphi(k)}\right)\right|}_{\leqslant \left\|f_{\varphi(k)} - f\right\|_\infty \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\left|f\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x_0)\right|}_{\substack{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (f \text{ est continue})}}$$

Donc, $\lim_{k\to\infty} f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) = f(x_0)$.
Dès lors, par passage à la limite dans (**??**), on obtient : $\forall y \in I, |f(x_0) - f(y)| \leqslant n|x_0 - y|$, donc $f \in F_n$, puis F_n est fermé.

1. car alors $\mathring{B} \subset \overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}^{\circ} = \emptyset$ donc $\mathring{B} = \emptyset$.
2. car E est complet

Étape 3 : Mq pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathring{F_n} = \emptyset$.

Comme E est métrique, on va montrer qu'il n'existe pas de boule ouverte $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \subset F_n$ avec $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$, ie :

$$\forall f \in F_n, \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(f,\varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$$

ie $\exists g \in E$ tq

$$\begin{cases} \|f-g\|_\infty < \varepsilon \\ \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1] \ / \ |g(y)-g(x)| > n\,|y-x| \end{cases}$$

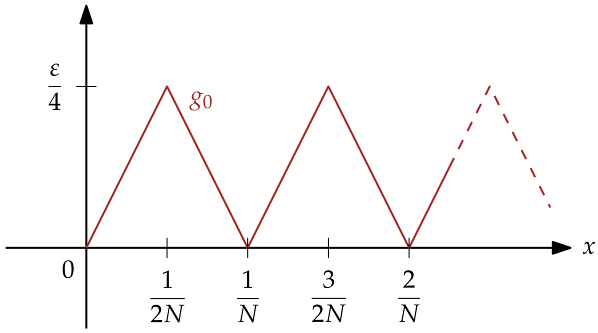
Soit donc $f \in F_n$, et $\varepsilon > 0$.

Par le théorème de Weierstrass : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \|P-f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On note $M = \|P'\|_\infty < \infty$ car P' est continue sur I compact.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tq $N \geqslant \frac{2(n+M+1)}{\varepsilon}$ (on verra plus tard pourquoi). On découpe $[0,1]$ en $\bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$.

On définit g_0, fonction périodique de période $\frac{1}{N}$ telle que, sur $\left[0, \frac{1}{N}\right]$:

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2N}\right] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \end{cases}$$



g_0 est continue et $\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$.

On pose $g = P + g_0$; on a : $\|f-g\|_\infty = \|f-P-g_0\|_\infty \leqslant \|f-P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

Donc $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$. Si on montre que $g \in F_n^c$, c'est gagné.

On a, pour tous $x, y \in I$: $|g(x)-g(y)| \geqslant |g_0(x)-g_0(y)| - |P(x)-P(y)|$.

De plus, pour $x \in I$, il existe $k \in [\![0, 2N-1]\!]$, tel que $x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$.

Puis, soit $y_x \in \left[x, \frac{k+1}{2N}\right]$, alors on a : $|g_0(x) - g_0(y_x)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x-y_x|$.

Et par l'inégalité des accroissements finis, on a : $|P(x)-P(y_x)| \leqslant M\,|x-y_x|$.

Par conséquent : $\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x)-g(y_x)| \geqslant \left(\frac{\varepsilon N}{2} - M\right)|x-y_x|$.

On se rend alors compte qu'il suffit d'imposer $\frac{\varepsilon N}{2} - M > n$, ie $N > \frac{2(n+M)}{\varepsilon}$ dès le début pour avoir :

$$\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x)-g(y_x)| > n\,|x-y_x|$$

Ainsi, $g \in F_n^c$, et finalement $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$.

■

Exemple de telle fonction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(4^n x, \mathbb{Z})}{4^n}$.

↪ Hauchecorne ex 9.6 p161, ZQ p269, Gourdon p284.

Questions possibles

1. Montrer le thm de Baire quand on connaît l'existence d'une FCNPD.

2. Montrer qu'une fonction continue est somme de deux FCNPD.

Notes :

✓ **A l'oral**, 14'16 allure normale sans expliciter g_0.
✓ Théorème de Baire : Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors si $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.
✓ En 1872, WEIERSTRASS fut le premier à publier non seulement une, mais toute une famille de fonctions continues et nulle part dérivables. Elles sont définies par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$ où a et b sont des constantes réelles, a étant dans $]0, 1[$ et le produit $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (même si HARDY la généralisera de façon optimale en 1916 en montrant que le produit ab ne devait qu'être plus grand que 1). Après cette découverte, des mathématiciens en trouvèrent d'autres.