Formule des compléments

Référence : Amar Matheron : Analyse complexe section 8.4.4 p.249
Leçons : 236, 239,245.

Définition

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Théorème (Formule des compléments)

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Lemme

Pour $\alpha \in]0,1[$, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

Preuve du Lemme :

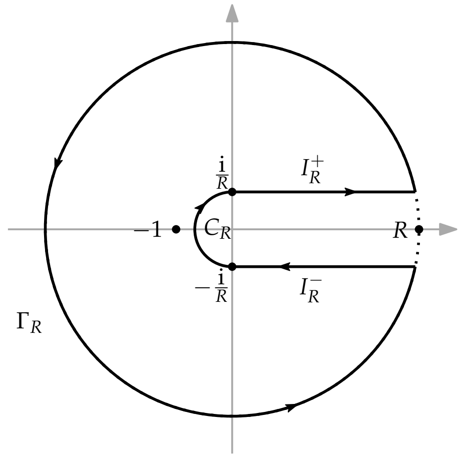
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (donc localement intégrable) ;
- En 0 : $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;
- En $+\infty$: $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$, où $z^\alpha = r^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}$ quand $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1}(1+z)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$, on définit comme sur l'illustration le chemin $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$, où :

- $C_R = \left\{ \frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \middle| \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right\}$;
- $I_R^+ = \left[\frac{\mathrm{i}}{R}, \frac{\mathrm{i}}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}\right]$ et $I_R^- = \left[-\frac{\mathrm{i}}{R}, -\frac{\mathrm{i}}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}\right]$;
- $\Gamma_R = \left\{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \middle| \theta_R \leqslant |\theta| \leqslant \pi\right\}$, avec $\theta_R = \arcsin\left(\frac{1}{R^2}\right)$.

Comme -1 appartient au compact délimité par Γ_R, le théorème des résidus donne :

$$\forall 1 < R, \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$$

On va passer à la limite $R \to +\infty$.
Tout d'abord :

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \underbrace{\mathrm{i}\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{\text{“d}z\text{”}}\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\left|\frac{1}{R}\right|}{\left|\frac{1}{R}\right|^\alpha \left|1+\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \pi\frac{\left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aussi :

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_R, 2\pi-\theta_R]}(\theta)\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}\left(1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{R}{R^\alpha\left|1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus : $\displaystyle\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{\mathrm{i}}{R}\right)^\alpha\left(1+t+\frac{\mathrm{i}}{R}\right)}\,\mathrm{d}t.$

Comme $t > 0$ et $\left(t+\mathrm{i}\frac{1}{R}\right)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}}\exp\left(\mathrm{i}\arctan\left(\frac{1}{Rt}\right)\right)\right)^\alpha \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^\alpha$, on a :

— $\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$;

— $\left|\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right)\right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable.

Par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = I_\alpha$$

Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que[1] $\left(t-\mathrm{i}\frac{1}{R}\right)^\alpha \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^\alpha\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha}$, on a, avec les conventions d'orientation :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\alpha}I_\alpha$$

Donc $\left(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\alpha}\right)I_\alpha = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$, c'est-à-dire :

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

■

1. l'angle négatif nous a fait ici apparaître le 2π.

<u>Preuve du Théorème :</u>

D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0, 1[$.
Soit donc $\alpha \in]0, 1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t-s}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha}\mathrm{e}^{-(s+t)}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\left\{\begin{array}{ccc} u & = & s+t \\ v & = & \dfrac{s}{t}\end{array}\right.$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 \\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha}\mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{v^{\alpha}(v+1)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(v+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

■

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, 15'30 en speedant à mort. Ne pas montrer pourquoi l'intégrale est finie.
✓ Quand on élève un nombre complexe à une puissance $z^c = (a + ib)^c$ il faut le mettre sous forme polaire $z^c = |z|^c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\mathrm{Arg}z}$. Attention ! ! Ici Arg$z$ doit être entre 0 et 2π.
✓ On utilise ici souvent $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.
✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.
✓ Rappel : Un point d'accumulation x d'une partie A d'un espace topologique est un point tel que :

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad B(x, \frac{1}{R}) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}$$

✓ ε du livre est remplacé ici par $\dfrac{1}{R}$
✓ Cette propriété a été découverte par Euler.
♣ Leonhard Euler (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.