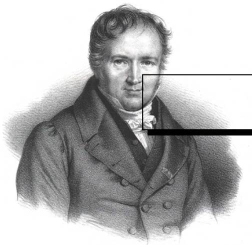

Formule sommatoire de Poisson

Référence : Gourdon : Analyse p. 273 + Willem Analyse harmonique réelle p. 149 pour Coro 1

Rappels sur la transformée de Fourier

Déf : la transformée de Fourier est tout d'abord définie pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ classiquement, pour $y \in \mathbb{R}$, par

$$\hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}} u(t) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi t y} \mathrm{d}t$$

Elle est bien définie par théorème de comparaison.

Déf : L'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}) : \quad &= \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta u(x)\right| < \infty\} \\ &= \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \lim_{|x| \to +\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta u(x)\right| = 0\} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$

Thm d'isomorphisme de Fourier : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & \boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$ est une bijection linéaire. On a $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$.

Egalité de Plancherel : Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est continue si on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_2$.

Propr : Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \hat{u} v = \int_{\mathbb{R}} u \hat{v}$

Théorème (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}$$

Preuve :

Etape 1 :

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sait que pour tout k, $f^{(k)}(x) = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Alors, soit $M > 0$ tq $|f(x)| \leqslant M/x^2$ pour $|x| \geqslant 1$ (il s'agit ici de prendre une "marge" de x, un x assez grand puisque le O est en $+\infty$).

On veut montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall x \in [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tq $|n| > K+1$ (pour que $|x+n| \geqslant 1$ cf[1]), $|f(x+n)| \leqslant \dfrac{M}{(x+n)^2} \leqslant$

1. Ainsi, on a $|n| > K+1 > K \leqslant |x|$ donc $|x+n| \geqslant ||x| - |n|| = |n| - |x| \geqslant K + 1 - K = 1$

$\underbrace{\dfrac{M}{(|n|-K)^2}}_{\text{indpt de } x}.$

Ainsi $\|f(\cdot+n)\|_\infty \leqslant \dfrac{M}{(|n|-K)^2}$.

Par comparaison des séries à termes positifs avec les sommes de Riemann, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}$. Notons $F=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot+n)$ sa limite simple.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions (comme $f\in\mathcal{C}^1$) montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$$

Etape 2 :

De plus, pour $x\in\mathbb{R}$, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n)=\sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

donc en faisant $N\to+\infty$, on en déduit $F(x+1)=F(x)$ ie F est 1-périodique.

On calcule les coefficients de Fourier de F, pour $N\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_N(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\mathrm{d}t \\ &\overset{2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\underbrace{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi Nn}}_{=1}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\mathrm{d}t=\hat{f}(N) \end{aligned}$$

Ainsi, comme F est $\mathcal{C}^1$ et de période $T=1$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi nx}{T}}$$

D'où le résultat souhaité. ■

Corollaire 1

Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $\delta_{\mathbb{Z}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k=\hat{\delta}_{\mathbb{Z}}\left(=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\cdot}\right)$

Preuve du Corollaire 1 :

Ce qui est entre parenthèses est à montrer selon le temps [3].

On fait attention ici à la notation du Willem. δ signifie δ_0 ie $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$. Donc :

$$\langle\tau_a\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,\tau_{-a}\varphi\rangle=\langle\delta,\varphi(\cdot+a)\rangle=\varphi(a)=\langle\delta_a,\varphi\rangle$$

2. on peut inverser car la série CVN et F est $\mathcal{C}^1$

3. On utilise la transformée de Fourier d'une translatée d'une fonction quelconque, $\hat{\delta}=1$ et la formule d'inversion. C'est plus ou moins fait dans le livre.

Ainsi $\tau_a\delta = \delta_a$.
On va déjà vérifier que ces sommes sont définies.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$, on sait que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ existe.

Du coup, $\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ donc $\delta_{\mathbb{Z}}$ existe bien.
Vérifions que $\delta_{\mathbb{Z}}$ est une distribution tempérée ie $\delta_{\mathbb{Z}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ et $\delta_{\mathbb{Z}}$ est linéaire et continue.
On sait que $\|\cdot\|_{n,p} : \varphi \mapsto \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^n\varphi^{(p)}(x)\right|$ sont les semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\left|n^2\varphi(n)\right| + |\varphi(0)| \\
&\leqslant \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right)}_{2\times\frac{\pi^2}{6}} \|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{0,0} \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{3}\underbrace{\left(\|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{0,0}\right)}_{\sum_{\substack{k\leqslant 2\\ l\leqslant 0}}\|\varphi\|_{k,l}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\delta_{\mathbb{Z}}$ est bien une distribution tempérée ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). On peut donc calculer sa transformée de Fourier.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle &= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \hat{\varphi}\rangle && \text{(def de Fourier dans les distrib)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) && \text{(def de } \delta_{\mathbb{Z}}\text{)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) && \text{(Formule sommatoire)} \\
&= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle && \text{(def de } \delta_{\mathbb{Z}}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\delta_{\mathbb{Z}} = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}$. ■

Corollaire 2

$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2/s}$$

Preuve du Corollaire 2 :

Soit $\alpha > 0$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$.
On calcule, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi tn}\mathrm{d}t \overset{(u=\sqrt{\alpha}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\mathrm{d}u}_{I(n)}$$

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}\mathrm{d}t$.
On va chercher une équation différentielle vérifiée par I. Déjà, montrons que I est dérivable. Pour cela, posons $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}$.
f est intégrable (comparaison à l'intégrale de Gauss). De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2\mathrm{i}\pi\dfrac{t}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à x et à t et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \underbrace{2\pi\dfrac{t}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-t^2}}_{\text{intégb et indep de } x}$

Ainsi I est dérivable et $I'(x) = \dfrac{-2\mathrm{i}\pi}{\sqrt{\alpha}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}\mathrm{d}t$.
D'autre part, on intègre par parties I :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathrm{e}^{-t^2}}_{\searrow}\underbrace{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}}_{\nearrow}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\mathrm{e}^{-t^2}\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\mathrm{i}\pi x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} -2t\mathrm{e}^{-t^2}\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\mathrm{i}\pi x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\mathrm{i}\pi x}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}\mathrm{d}t}_{\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\mathrm{i}\pi}I'(x)}$$

Finalement :

$$I(x) = -\frac{\alpha}{2\pi^2 x}I'(x)$$

Donc

$$I(x) = I(0)\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2x^2}{\alpha}} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2x^2}{\alpha}}$$

Et ainsi

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\alpha}I(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2x^2}{\alpha}}$$

On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2n^2}{\alpha}}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on prend $\alpha = \pi s$. ■

Réponses à de possibles questions

1. A-t-on le résultat si on affaiblit les hypothèses ? (Alexis Ropiquet)
   ↪ Oui : on n'a juste besoin de o mais on peut fabriquer un contre-exemple avec $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et une convolution.

Notes :

✓ **A l'oral**, on ne fait qu'un des 2 corollaires selon la leçon mais attention on l'écrit dès le début avec le plan comme ça on ne se trompe pas. Avec le **Corollaire 1**, c'est un peu court, il faut bien prendre son temps. Avec le **Corollaire 2**, on a juste le temps qu'il faut, il ne faut pas speeder (sauf si on est à la bourre à la fin), ni prendre son temps. Toujours pour le **Corollaire 2**, être entre 7 et 8 min à la fin de la démo du théorème. Thm 7', coro 1 3'42 (aïe), coro 2 7'.
✓ Il faut ici savoir redémontrer l'intégrale de Gauss pour le **Corollaire 2**.
♣ Siméon Poisson (1781 - 1840) est un mathématicien, géomètre et physicien français. Sa contribution la plus essentielle concerne l'électricité et le magnétisme qu'il contribua à fonder mais il eut également une influence en astronomie, notamment sur l'attraction des planètes. En mathématique, ses travaux les plus importants portent sur la série sur les intégrales définies, sur les séries de Fourier, les intégrales de Fourier, sur le calcul des variations, sur la probabilité des moindres résultats des observations.