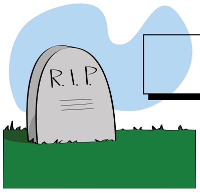

Théorème de Grothendieck

Référence : Zavidovique : Un max de Math, p. 180 + Rudin : Analyse fonctionnelle p.115 pour l'étape 3

Contexte : $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. (donc $\mu(\Omega) = 1$)
Prérequis : Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Déf de $L^p(\mu)$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, $L^p(\mu)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, Thm du graphe fermé, Inégalité de Hölder, base hilbertienne, théorème de Pythagore.

Théorème (Théorème de Grothendieck - 1954)
Soit $1 \leqslant p < +\infty$.
Tout sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ qui est inclus dans $L^\infty(\mu)$ est de dimension finie.

Note : Comme $S \subset L^\infty(\mu)$ et que μ est finie, les L^p sont décroissants et $S \subset L^q(\mu)$ pour n'importe quel q.

Preuve du théorème :

But : se ramener à $L^2(\mu)$.

Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ inclus dans $L^\infty(\mu)$.
Etape 1 On montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p$.

On définit, comme ($S \subset L^\infty$),

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (S, \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & (L^\infty, \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

S est un sev fermé de L^p qui est complet donc S est complet.
S est donc un Banach (evn complet), L^∞ aussi et Φ est linéaire.
On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé : pour montrer que Φ est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé.
Soit $(f_n, \Phi(f_n))$ une suite de son graphe qui converge vers (f, g).
On a $f \in S \subset L^p$ car S est fermé et $g \in L^\infty$ car L^∞ est un Banach (voir Notes pour détails).
$\Phi(f_n) = f_n$ et la convergence L^∞ implique la convergence L^p car μ est une mesure finie[1]. Donc, par unicité de la limite dans L^p, $g = f = \Phi(f)$.
Le graphe de Φ est ainsi fermé donc Φ est continue.
Il existe donc une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in S,\ \|f\|_\infty = ||\Phi(f)||_\infty \leqslant K \|f\|_p .$$

Etape 2 On montre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$.

Distinguons deux cas.

◇ Si $p < 2$ alors $1 < \dfrac{2}{p}$, et l'inégalité de Hölder implique

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \times 1 \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{2}{p}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{2}} \underbrace{\left(\int_\Omega 1^{\frac{2}{2-p}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{2-p}{2}}}_{=\mu(\Omega)=1} \leqslant \|f\|_2^p .$$

En élevant à la puissance $\dfrac{1}{p}$, on trouve

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_2 .$$

1. $\|f_n - g\|_p^p = \int_\Omega (f_n - g)^p \leqslant \mu(\Omega) \|f_n - g\|_\infty^p = 1 \times \|f_n - g\|_\infty^p \to 0$

Ce qui donne le résultat annoncé en prenant $K = M$ ($\|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p \leqslant K \|f\|_2$).

$\diamond$ Soit $p \geqslant 2$.
Par définition du supremum essentiel, il existe alors N un ensemble de mesure nulle tel que

$$\forall x \in \Omega \setminus N,\ |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty .$$

On obtient donc

$$\forall x \in \Omega \setminus N,\ |f(x)|^p = |f(x)|^{p-2} |f(x)|^2 \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2 .$$

On intègre ces inégalités sur $\Omega \setminus N$, ce qui revient exactement à intégrer sur Ω comme N est de mesure nulle.

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 .$$

On utilise la question précédente pour obtenir :

$$\|f\|_\infty^p \leqslant K^p \|f\|_p^p \leqslant K^p \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 .$$

D'où,

$$\|f\|_\infty \leqslant K^{p/2} \|f\|_2 .$$

$\diamond$ On prend alors $M = \max(K, K^{p/2})$.

$$\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2 .$$

Etape 3 On considère $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de fonctions de S. On suppose que cette famille est orthonormée de $L^2(\mu)$ (possible car $S \subset L^2(\mu)$ par note en dessous du **Théorème**).

Soit Q une partie dénombrable dense [2] de $\mathbb{R}^n$ (possible par $\mathbb{R}$ séparable). Soient $c = (c_1, \dots, c_n) \in Q^n$ et posons $f_c = \sum c_i f_i$.
On a,

$$\|f_c\|_\infty \leqslant M \|f_c\|_2 = M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore dans L^2 en utilisant le fait que (f_i) forment une famille orthonormée de L^2.
Puisque Q est dénombrable, il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega') = 1$ et tel que [3]

$$\forall x \in \Omega',\ |f_c(x)| \leqslant \|f_c\|_\infty .$$

Soit $x \in \Omega'$ fixé. Comme $c \mapsto f_c(x)$ est continue (polynomial en les c_i) sur $\mathbb{R}^n$, et comme Q est dense dans $\mathbb{R}^n$, on aura,

$$\forall x \in \Omega',\ \forall c \in \mathbb{R}^n,\ |f_c(x)| \leqslant \|f_c\|_\infty \leqslant M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Etape 4 On en déduit que $n \leqslant M^2$.

On applique l'étape 3 avec $c_i = f_i(x)$, [4] et on élève au carré.
On trouve alors, pour tout $x \in \Omega'$,

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)^2\right)^2 \leqslant M^2 \sum_{i=1}^n f_i(x)^2.$$

2. Ici, on ne peut plus faire le truc du Max de Maths car l'ensemble de mesure nulle depend des c_i du coup on ne peut pas intégrer.

3. L'idée est : On veut inverser pour tout x, presque surement, on a : ... Et remplacer par presque surement, pour tout x, on a : ...

4. Si on reprend les inégalités, cela est bien possible. Il suffit de garder en tête que x est fixé et que l'on considère $c_i = f_i(x)$ comme constante et f_i comme fonction. Si on pose $\varphi : t \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) f_i(t)$ (ie $\varphi = \sum_{i=1}^n f_i(x) f_i$).
Alors, par exemple pour la première inégalité, pour tout t, $\left|\sum_{i=1}^n f_i(x) f_i(t)\right| = |\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^n f_i(x) f_i\right\|_\infty$. On peut appliquer a fortiori en $t = x$ et on a $\left|\sum_{i=1}^n f_i(x)^2\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n f_i(x) f_i\right\|_\infty$. On peut faire ce procédé pour chaque inégalité.

Lorsque $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \neq 0$, on simplifie :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \leqslant M^2,$$

et cette inégalité reste bien entendue vraie quand $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 = 0$.
On intègre alors sur Ω', ce qui exactement pareil que d'intégrer sur Ω car Ω' est de mesure pleine. Et comme les f_i sont de norme 1 (ie $\int f_i\ ^2 = 1$), on obtient

$$n = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \right) \mathrm{d}\mu \leqslant M^2 \int_\Omega 1 \ \mathrm{d}\mu = M^2 \mu(\Omega) = M^2.$$

Ce qui prouve l'étape 4.

Etape 5 (Conclusion)
Supposons par l'absurde S de dimension infinie. Si toutes les familles de S à M^2+1 éléments étaient liés, la dimension serait finie. Donc on peut trouver une famille libre à M^2+1 éléments. En orthonormalisant cette famille (Gram-Schmidt par exemple), on a une famille orthonormée à M^2+1 éléments. Absurde car le cardinal de la famille doit être inférieur à M^2 avec l'étape 4.
Donc S est bien de dimension finie. ■

Notes :

✓ **A l'oral**, on fait tout. Si pas assez de temps sauter l'étape 5. S'il reste du temps, détailler $c_i = f_i(x)$.
✓ Rappel : Théorème du Graphe Fermé. Soient E, F des espaces de Banach.
Une application linéaire f de E dans F est continue ssi son graphe $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.
✓ Rappel : Inégalité de Hölder.
Soient S un espace mesuré, $p, q > 0$ (la valeur $+\infty$ étant permise) tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(S)$ et $g \in L_q(S)$.
Alors, le produit fg appartient à $L_1(S)$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
En fait, les conditions sur p et q donnent que $p, q > 1$.
✓ Rappel : Théorème de Pythagore.
Si une famille est orthogonale, $\left\|\sum \cdot\right\|^2 = \sum \|\cdot\|^2$.
✓ Rappel : Dans un espace métrique (par exemple un evn), toute suite convergente est de Cauchy. Donc a fortiori si une suite d'un Banach converge, c'est une suite de Cauchy donc elle converge dans le dit Banach.
✓ L'hypothèse de fermeture est indispensable.
✓ L'hypothèse d'inclusion dans L^∞ est également fondamentale, et ne peut pas être remplacée par une inclusion dans un L^q avec $p < q < +\infty$. Rudin construit, juste après avoir énoncé ce théorème, un sous-espace fermé de L^1, qui vit dans L^4 et qui est de dimension infinie.
✓ On peut mettre un espace mesuré de mesure finie (pas forcément de mesure de probabilité) et les fonctions peuvent aller dans $\mathbb{C}$. La preuve reste essentiellement la même.
✓ On a décroissance des L^p car la mesure est finie.
♣ Alexandre (ou Alexander) Grothendieck (1928 - 2014) est un mathématicien né à Berlin, apatride puis français. Il est considéré comme le refondateur de la géométrie algébrique. Il était connu pour son intuition extraordinaire et sa capacité de travail exceptionnelle. Entre 20 et 23 ans, il va résoudre 14 questions sur lesquelles Dieudonné et Schwartz (ses directeurs de thèse) "butent" et rédige l'équivalent de six thèses de doctorat. La médaille Fields lui a été décernée en 1966.