

INTÉGRALE DE FRESNEL

Référence : MADÈRE : Développements d'Analyse p. 166

THÉORÈME

On a l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Preuve :

On pose $\Phi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$.

Pour $t, T \geq 0$, on pose : $f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx$, $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} dx dy$ et $I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$.

On va exprimer $F(t)$ de deux manières.

D'une part, la fonction $(x, y) \mapsto e^{i(x^2+y^2)}$ est continue sur le pavé compact $[0, t]^2$. En appliquant Fubini, on obtient : $F(t) = f(t)^2$.

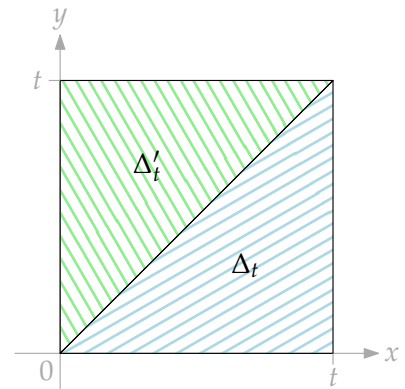
D'autre part, notons :

$$\Delta_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, t] \text{ et } y \in [0, x]\}$$

$$\Delta'_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, t] \text{ et } x \in [0, y]\}$$

La fonction $(x, y) \mapsto (y, x)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Δ_t sur Δ'_t . Par changement de variable, on obtient :

$$F(t) = \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy + \iint_{\Delta'_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy = 2 \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy$$



La forme de l'intégrande suggère alors un passage en coordonnées polaires : $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $K_t := \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } r \in \left[0, \frac{t}{\cos \theta}\right] \right\}$ sur Δ_t .

On obtient alors :

$$F(t) = 2 \iint_{K_t} e^{ir^2} r dr d\theta = \frac{1}{i} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{t}{\cos \theta}} 2ir e^{ir^2} dr d\theta = -i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) - 1 \right) d\theta = \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta$$

Puis, en injectant dans $I(T)$, on obtient :

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^T \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta dt$$

En appliquant Fubini, puis le changement de variable $u = \frac{t}{\cos \theta}$, on trouve :

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^T \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) dt d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{T}{\cos \theta}} e^{iu^2} \cos \theta du d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{T}{\cos \theta}\right) \cos \theta d\theta$$

On souhaite désormais faire tendre T vers $+\infty$. On va montrer que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Il suffit de montrer que l'intégrale de Fresnel est convergente. Étudions $\int_1^t e^{ix^2} dx$.

Par changement de variable $u = x^2$ et en faisant une intégration par parties :

$$\int_1^t e^{ix^2} dx = \int_1^{t^2} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\frac{e^{iu}}{i} \frac{1}{2\sqrt{u}} \right]_1^{t^2} - \int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{i} \frac{-1}{4u^{\frac{3}{2}}} du = \underbrace{\frac{e^{it^2}}{2it}}_{\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0} - \frac{e^i}{2i} + \frac{1}{4i} \int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

quantité bornée par convergence dominée

Donc f est bornée au voisinage de $+\infty$, donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = i\frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \Phi$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \Phi^2$. Montrons que $\lim_{T \rightarrow \infty} I(T) = \Phi^2$.

Soit $\varepsilon > 0$; $\exists A > 0, \forall t \geq A, |F(t) - \Phi^2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $T > A$, on a :

$$I(T) = \frac{1}{T} \int_0^A F(t) dt + \frac{1}{T} \int_A^T F(t) dt \text{ puis } |I(T) - \Phi^2| \leq \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^A |F(t) - \Phi^2| dt}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } T \geq T_0} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_A^T |F(t) - \Phi^2| dt}_{< \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-A}{T}}$$

Donc pour $T \geq \max\{A, T_0\}$, $|I(T) - \Phi^2| < \varepsilon$, d'où $\lim_{T \rightarrow \infty} I(T) = \Phi^2$.

Par unicité de la limite : $\Phi^2 = i\frac{\pi}{4}$, d'où $\Phi = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Pour déterminer le bon signe, on regarde le signe de $\Im(\Phi)$:

$$\begin{aligned} \Im(\Phi) &= \Im\left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx\right) = \Im\left(\int_0^\infty e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left(\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right) = \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. ■

Notes :

✓ **A l'oral**, 13'45 allure normale.

♣ Augustin FRESNEL (1788 - 1827) -tuberculose- est un physicien français. Fondateur de l'optique moderne, il proposa une explication de tous les phénomènes optiques dans le cadre de la théorie ondulatoire de la lumière.