Lemme de Morse

Référence : Rouvière : Petit guide de calcul différentiel p. 354 (exercice 114) et p. 210 (exercice 66)

Lemme (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)

Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$$

(i.e. toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente i.e. se ramène à celle-ci par changement de base)

Preuve :

Idée : appliquer le théorème d'inversion locale.

Etape 1 :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|\cdot\|$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &=^t (I_n + H) A_0 (I_n + H) - A_0 \\ &= A_0 + A_0 H +^t HA_0 +^t HA_0H - A_0 \\ &=^t HA_0 + A_0H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Or A_0 symétrique donc ${}^tHA_0 =^t (A_0H)$. De plus, $H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$ est linéaire. D'où

$$\mathrm{D}\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$$

D'où $H \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (i.e. le noyau est formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétrique).

$\mathrm{D}\varphi(I_n)$ n'est donc pas bijective[1] (problème sur l'injectivité), on ne peut pas appliquer le TIL. Idée : la restreindre..

Etape 2 :

On pose $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. On a également vu que $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

Alors $F \cong S_n(\mathbb{R})$ par $H \tilde{\to} {A_0}^{-1}H$. Et $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \cong \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le même isomorphisme (cf note $\star$). Donc :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n))$$

Soit $\chi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. Déjà, $I_n \in F$.

$\mathrm{D}\chi(I_n)$ est bijective. En effet, par l'égalité des dimensions l'injectivité suffit :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\chi(I_n)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\varphi(I_n)) \cap F = \{0\} \qquad \text{(par la somme directe)}$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles, car det est continue donc on peut trouver un ouvert U' de I_n de matrices de déterminant non nul donc inversibles, on peut alors prendre $U \cap U'$) tel que χ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \chi(U)$.

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \chi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $A =^t \chi^{-1}(A) A_0 \chi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\rho = \chi^{-1}$ ■

1. On peut exhiber la surjectivité car pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{D}\varphi(I_n)\left(\dfrac{A_0^{-1}A}{2}\right) = \dfrac{1}{2}({}^tA + A) = A$

Théorème (Lemme de Morse à n variables - $\approx$1934)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$.
On suppose que $\mathrm{D}f(0) = 0$, que $\mathrm{D}^2 f(0)$ est non dégénérée (donc inversible car c'est une matrice) et que $\mathrm{sign}(\mathrm{D}^2 f(0)) = (p, n-p)$.
Alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

- $\star$ $\varphi(0) = 0$
- $\star$ $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

Preuve :

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \mathrm{D}f(0)(x) + \int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{D}^2 f(tx)\right)(x,x)\mathrm{d}t \\ &= {}^t x \left(\underbrace{\int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{D}^2 f(tx)\right)\mathrm{d}t}_{} \right) x \\ &= \quad {}^t x \qquad Q(x) \qquad x \end{aligned}$$

Q est de classe[2] $\mathcal{C}^1$. De plus, $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ car $Q(0) = \dfrac{\mathrm{D}^2 f(0)}{2}$.
On peut donc appliquer le **Lemme** :
Il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$$

De plus comme $Q : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto Q(x) \end{array}$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$.
Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$, donc

$$Q(x) =^t \rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$$

On pose $M(x) = \rho(Q(x))$ et on obtient

$$\underline{Q(x) =^t M(x)Q(0)M(x)}$$

D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester appliquée à $Q(0)$ qui est aussi de signature $(p, n-p)$, $\exists A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) =^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$$

Finalement

$$f(x) - f(0) =^t x^t M(x)^t A \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} AM(x)x$$

En posant $\varphi(x) = AM(x)x$, on a

$$f(x) - f(0) =^t \varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$$

Et donc avec $u = \varphi(x)$, on a bien

- $\star$ $\varphi(0) = 0$
- $\star$ $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

2. surement continuité sous le signe intégrale

Il reste à montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0. φ est $\mathcal{C}^1$ car M l'est [3] (*d'où la **nécessité** d'avoir pris f $\mathcal{C}^3$ sinon on n'aurait pas eu Q $\mathcal{C}^1$ donc M $\mathcal{C}^1$ non plus*)
Calculons la différentielle à l'origine de φ :

$$\begin{aligned}\varphi(h)-\varphi(0) =& A^{-1}M(h)h\\ =& A^{-1}\left(M(0)+\mathrm{D}M(0).h+o(\|h\|)\right)h\\ & \text{car } M \text{ est différentiable en 0 puisque } \rho\circ Q \text{ l'est}\\ =& A^{-1}M(0)h+o(\|h\|)\end{aligned}$$

Comme $A^{-1}M(0)\in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{D}\varphi(0)$ est inversible.
D'après la théorème d'inversion locale appliqué à φ, il existe deux voisinages de 0 (en fait de 0 et de $\varphi(0)=0$) tels que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre ces deux voisinages. ■

Notes :

✓ **A l'oral**, 14'33 vite sans première différentielle
✓ Un difféomorphisme c'est : bijectif, différentiable et dont la réciproque est différentiable. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme c'est : bijectif, $\mathcal{C}^1$, et dont la réciproque est $\mathcal{C}^1$. Attention, un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est parfois appelé difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. C'est le cas dans le Rouvière.
✓ Rappel : Théorème d'inversion locale. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a\in U$, et $f:U\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(a)$ est inversible i.e. $\det \mathrm{D}f(a)\neq 0$. Alors il existe un ouvert $V\subset U$ qui contient a et un ouvert W qui contient $f(a)$, tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W=f(V)$.
✓ Si A isomorphe à A' et B isomorphe par le même isomorphisme à B' alors $A\oplus B=A'\oplus B'$
✓ Rappel : Formule de Taylor reste-intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, on a

$$f(a+h)=f(a)+\mathrm{D}f(a)(h)+\cdots+\frac{1}{k!}\mathrm{D}^kf(a)(h)^k+\int_0^1\frac{(1-t)^k}{k!}\mathrm{D}^{k+1}f(a+th)(h)^{k+1}\,\mathrm{d}t$$

Attention, la notation $(h)^k$ signifie $\underbrace{(h,h,\cdots,h)}_{k \text{ fois}}$.
✓ Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, soir $a\in\mathbb{R}^n$ alors $\mathrm{D}^2f(a)$ est un matrice de taille $n\times n$. Ainsi, on peut écrire $\mathrm{D}^2f(a)(h,k)={}^tk\mathrm{D}^2f(a)h$ matriciellement.
✓ Une forme quadratique q est non-dégénérée si $\mathrm{Ker}(q)=\{0\}$.
✓ Théorème d'inertie de Sylvester version simplifiée : si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature $(p,n-p)$ alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_{n-p}\end{pmatrix}$.
✓ Dès que P est inversible, on a $({}^tP)^{-1}={}^t(P^{-1})$.
✓ Application en géométrie des surfaces.
✓ Application dans la méthode de la phase stationnaire [ZQ p341] ?.
♣ Marston Morse (1892-1977) (à ne pas confondre avec Anthony Morse, mathématicien également) est un mathématicien américain, connu surtout pour ses travaux sur le calcul des variations global, un sujet où il a introduit la technique de topologie différentielle appelée depuis théorie de Morse.

⋆ Si on veut la décomposition explicite de $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de

$$M=A_0^{-1}AM=A_0^{-1}\left(\frac{{}^t(AM)+AM}{2}-\frac{{}^t(AM)-AM}{2}\right)=A_0^{-1}\frac{{}^t(AM)+AM}{2}-A_0^{-1}\frac{{}^t(AM)-AM}{2}$$

3. Détails : Si on veut s'en convaincre, on calcule sa différentielle, qui est continue. En effet : si x appartient à un voisinage de 0, $\varphi(x+h)-\varphi(x)=A^{-1}M(x+h)(x+h)-A^{-1}M(x)(x)=\cdots=A^{-1}[(\mathrm{D}M(x).h)x+M(x)h]+o(\|h\|)$.
Et donc $\mathrm{D}\varphi(x)=\{h\mapsto A^{-1}[(\mathrm{D}M(x).h)x+M(x)h]\}$ est bien linéaire et de plus continue en h car M $\mathcal{C}^1$ donc sa différentielle est continue...