Méthode de Newton

Référence : Rouvière : Petit guide de calcul différentiel, Exercice 49 p. 152

Cette méthode permet de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.
Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$.
f admet donc un unique zéro a dans l'intervalle $]c,d[$.
On définit F sur $[c,d]$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On a ainsi $F(a) = a$. Le problème de zéro est ramené à un problème de point fixe.
On a $F'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ et donc $F'(a) = 0$.

Théorème

Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose tant qu'on peut $x_{n+1} = F(x_n)$

1. Il existe un intervalle $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ stable par F. En prenant $x_0 \in J$, la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge de façon quadratique (d'ordre 2) vers le point fixe a.
2. Si, de plus, on suppose que f est convexe, on n'a plus besoin de prendre x_0 proche de a, comme le montre le résultat suivant :
   Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$, alors la suite (x_n) est bien définie, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a$.
   Dans ce cas, on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

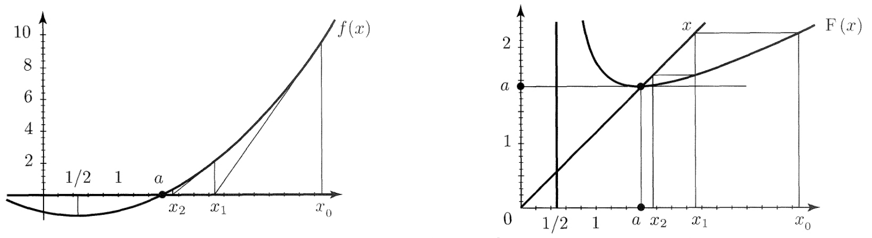

Fig. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2+1)/(2x-1)$.

✓ Avantages de la méthode : s'il y a convergence, celle-ci est rapide (souvent quadratique), elle nécessite un seul point de départ.
✓ Inconvénients de la méthode : f doit être suffisamment régulière, la convergence n'est pas assurée dans tous les cas, s'il y a plusieurs racines elle ne converge par forcément vers la plus proche du point de départ.

Preuve :

1. **Étape 1 :** (question 1) Pour $x \in [c,d]$:

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \\ &= \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :
Il existe $z \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que :

$$f(a) = 0 = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(z)$$

On en déduit :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Étape 2 : (question 2) On pose $C = \dfrac{\max |f''|}{2 \min f'}$. Ce dernier est bien défini car f'' et f' sont continues sur le segment $[c, d]$. On obtient $|F(x) - a| \leqslant C|x - a|^2$ pour $x \in [c, d]$.
On choisit $\alpha > 0$ tel que $J = [a - \alpha, a + \alpha] \subset [c, d]$ et tel que $C\alpha < 1$.
Alors, si $x \in J$, $|F(x) - a| \leqslant C\,|x - a|^2 \leqslant C\alpha^2 < \alpha$.
Ainsi $F(J) \subset J$ ie J est stable par F.
En prenant $x_0 \in J$ on a, pour tout n, $x_n \in J$ et $|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$.
D'où

$$C\,|x_n - a| \leqslant (C\,|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant \underbrace{(C\alpha)}_{<1}{}^{2^n}$$

donc la convergence est d'ordre 2.

2. (question 3)

Étape 1 : Pour $x \in [a, d]$, $f(x) \geqslant 0$ et $f' > 0$.
Donc $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x$.
D'autre part, $f'' > 0$ et la preuve de 1., avec la formule de Taylor-Lagrange, montre que $F(x) - a \geqslant 0$ (toujours pour $x \in [a, d]$).
Ainsi, l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par F.
De plus, si $x_0 \in]a, d]$ la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est stationnaire.
Sous les conditions de l'énoncé, la suite est donc décroissante, minorée par a, donc converge vers une limite l point fixe de F.
Donc $f(l) = 0$, d'où $l = a$. La convergence vers a est quadratique, comme précédemment.

Étape 2 : Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale.
De plus, si $x_0 > a$, on a pour tout n, $x_n > a$ et, comme dans la preuve précédente :

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

avec $a < z_n < x_n$.
Comme $\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \dfrac{f''(a)}{f'(a)}$ (z_n est "coincé" donc converge + continuité de f' et f''), on obtient l'équivalent souhaité.

■

Exemple

(Rouvière fin de l'exo)Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$; imaginons qu'on veuille estimer $a = \sqrt{y}$. Soit $f : x \mapsto x^2 - y$, définie sur un intervalle $[c, d]$, avec $0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher a, on doit itérer la fonction $F(x) = x - \dfrac{x^2 - y}{2x}$.
On a alors : $F(x) - a = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$.
Donc, en prenant $x_0 \in]a, d]$ et en posant $x_n = F^n(x_0)$, on obtient : $\dfrac{x_n + a}{x_n - a} = \left(\dfrac{x_0 + a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.
Par conséquent : $1 + \dfrac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \left(\dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.
On obtient donc un encadrement de l'erreur : $0 < x_n - a \leqslant 2a\left(\dfrac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$.

Exemple (Approximation du nombre d'or)

(Rouvière pages avant) Le nombre d'or $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ est un point fixe de $F(x) = \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ ainsi que de $G(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle stable $[\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.
On a $F'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
On sait pour ces deux fonctions qu'il y a bien convergence car $|F'(x)| \leqslant 1/2$ et $|G'(x)| \leqslant 1/2$.
Seulement, a priori, on sait que la convergence est linéaire mais on ne sait pas plus. (voir **Théorème** ci-dessous)
La méthode de Newton appliquée à $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ sur $[c, d] = I = [1, 2]$ (qui vérifie bien les hypothèses) offre donc une convergence plus rapide directement.

Théorème (Méthode du point fixe et convergence)

Soient $F\ :\ I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$ un point fixe de F. Alors :

i) Point fixe attractif.
Si $|F'(a)| < 1$, il existe un intervalle fermé J centré en a, stable par F tel que pour $x_0 \in J$, la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers le point fixe a.

ii) Sous les conditions de i), et si F' ne s'annule pas sur J, si $x_0 \neq a$, alors pour tout n, $x_n \neq a$ et

$$x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} F'(a)(x_n - a)$$

ie convergence d'ordre 1, convergence linéaire.

iii) Point fixe superattractif.
Sous les conditions de i), et si F est de classe $\mathcal{C}^2$, si $F'(a) = 0$, si F'' ne s'annule pas sur J et si $x_0 \neq a$, alors pour tout n, $x_n \neq a$ et

$$x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2$$

ie convergence d'ordre 2, convergence quadratique (différent de la convergence en moyenne quadratique).

iv) Point fixe répulsif.
(Si $|F'(a)| > 1$, il existe un intervalle fermé J centré en a, tel que, pour $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, la suite x_n sorte de J.)

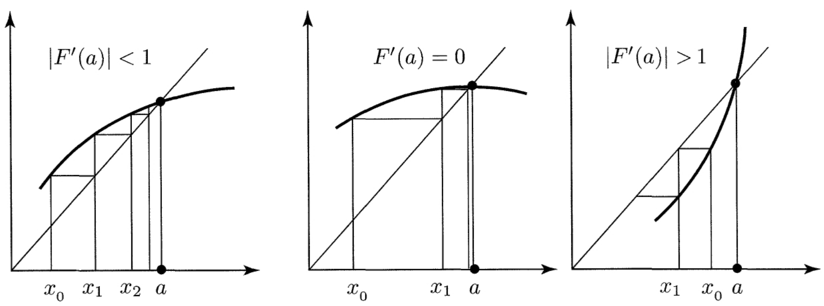

Fig. Point fixe attractif, superattractif, ou répulsif.

Notes :

✓ **A l'oral**, on a énormément le temps. On fait l'interprétation géométrique au début, et on fait le nombre d'Or.
✓ Généralement, cette méthode se fait après dichotomie ou gradient à pas optimal pour avoir déjà une idée de l'intervalle où se situe le zéro.
✓ L'interprétation géométrique de cette méthode est assez facile. En effet, elle donne :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui exprime que $x_{n+1} = F(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.
♣ Isaac Newton (1643 - 1727) -il est donc mort très vieux pour son époque !- est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal, en optique, en théologie et en alchimie .