Théorème de Molien avec séries formelles

Laura Gay ♡ Camille Francini

Référence : Leichtnam : Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours Polytechnique et des ENS Tome Algèbre et Géométrie p. 95 (ou Peyré : L'algèbre discrète de la transformée de Fourier : Niveau M1)

Théorème (*Théorème de Molien - 1897 ?*)

Soit $u \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $P \in A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ on pose $\sigma(u)(P) = P(u^{-1}(X_1, ..., X_n)^t) = P\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_{j,1}X_j, ..., \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_{j,n}X_j\right)$.

Alors :

1. L'application $\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(A)$ est bien définie et est un morphisme de groupes. $\forall k \in \mathbb{N}$, ce morphisme induit, par restriction, un morphisme $\sigma_k : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(A_k)$ où A_k désigne l'ensemble des polynômes homogènes à n variables de degré k.
2. Si G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, G agit aussi sur A_k et on a :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - gX)} = \sum_{k=0}^{\infty} \dim(A_k^G)X^k,$$

où $A_k^G = \{P \in A_k \mid \forall g \in G \ \sigma_k(g)(P) = P\}$.

Lemme

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi : G \to \mathcal{GL}(V)$ un morphisme de groupe. On note $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, \varphi(g)(v) = v\}$.

Alors :

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\varphi(g))$$

Preuve du Lemme

On pose pour cela : $p_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \varphi(g)$

Alors, on remarque que $\forall v \in V, \forall h \in G$ on a :

$$\varphi(h)(p_G(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \varphi(h)\varphi(g)(v)$$

Mais $g \mapsto hg$ est une permutation de G et $\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg)$

Nous avons donc que $\varphi(h)(p_G(v)) = p_G(v)$ donc $p_G(V) \subset V^G$.

De plus, pour tout $v \in V^G$, on a : $p_G(v) = v$, donc $p_G(V) = V^G$.

Comme $\varphi(h)p_G = p_G$ pour tout $h \in G$ on a $p_G \circ p_G = p_G$.

Ainsi p_G est un projecteur d'image V^G et donc :

$$\mathrm{rg}(p_G) = \dim V^G = \mathrm{tr}(p_G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\varphi(g)) \qquad \blacksquare$$

Preuve du théorème

Étapes :

1) Création d'un automorphisme $\sigma_k(g)$ de A_k

2) On montre que $\dfrac{1}{\det(I-Xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(\sigma_k(g))X^k$

3) On conclut alors sur l'égalité avec le **Lemme**.

Etape 1 :

Vérifions déjà que l'application σ est bien définie (et donc que l'on avait bien une action). Déjà :

$$\begin{aligned}\sigma(g)\circ\sigma(g')(P) &= \sigma_g(\sigma_{g'}(P)) \\ &= \sigma(g')(P)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} u_{j,1}X_j, ..., \sum_{1\leqslant j\leqslant n} u_{j,n}X_j\right) \\ &= \sigma(g\circ g')(P)\end{aligned}$$

De plus on a $\sigma(I) = I$ donc $\forall g\in G$, $(\sigma(g))^{-1} = \sigma(g^{-1})$. Comme de plus $\sigma(g)$ est linéaire, $\sigma(g)$ est bien dans $\mathrm{Aut}(A)$.
De plus $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall g\in G$, on a $\sigma_g(A_k)\subset A_k$. Or A_k est de dimension finie et $\sigma(g)$ est injective.
$\sigma(g)$ est surjective par $(\sigma(g))^{-1} = \sigma(g^{-1})$.
Donc $\sigma(g)$ induit un isomorphisme *(sert à dire qu'on est bien dans $\mathcal{GL}$)* de A_k que l'on appelle $\sigma_k(g)$ $(= \sigma(g)_{|A_k})$.

Etape 2 :

D'après le théorème de Lagrange $\forall g\in G$, $g^{|G|} = I$. Or le polynôme $X^{|G|}-1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi, g est diagonalisable, il existe donc $u\in\mathcal{GL}(W)$ tel que : ugu^{-1} admette une matrice diagonale dans la base $(e_1,..,e_n)$. Alors, comme : $\sigma(ugu^{-1})_{|A_k} = \sigma(u)_{|A_k}\sigma(g)_{|A_k}\sigma(u^{-1})_{|A_k}$, on a :

$$\mathrm{tr}(\sigma_k(g)) = \mathrm{tr}(\sigma(ugu^{-1})_{|A_k})$$

On peut ainsi se ramener au cas où $g\in G$ est une matrice diagonale dans la base $(e_1,..,e_n)$: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

On a :

$$\frac{1}{\det(I-Xg)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_i X} = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\lambda_i^p X^p\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p X^p$$

Avec $v_p = \sum_{\substack{k_1,...k_n\in\mathbb{N},\\ k_1+..+k_n=p}} \lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n}$ (produit de Cauchy des séries)

Or $g_p(X_1^{k_1}...X_n^{k_n}) = \lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n}X_1^{k_1}..X_n^{k_n}$.
Ainsi, comme $\{X_1^{i_1}...X_n^{i_n}/i_1,..i_n \in \mathbb{N} \text{ et } i_1+...+i_n = p\}$ est une base de A_p, $v_p = \mathrm{tr}(g_p)$ et donc $\dfrac{1}{\det(I-Xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{tr}(\sigma_k(g))X^k$

Etape 3 :

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{GL}(A_k) \\ g & \mapsto & \sigma_k(g)\end{array}$ est un morphisme de groupe.
Ainsi, on peut appliquer le **Lemme**, et on a :

$$\dim(A_k^G) = \dim(A_k^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(\sigma_k(g))$$

Donc :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I-Xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\dim(A_k^G)X^k \qquad \blacksquare$$

Bonus :

$$a_p = \binom{p}{p+n-1}$$

En effet on a $\sum_{p\geq 0} a_p X^p = \left(\frac{1}{1-X}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{1-X}\right)^{(n-1)} = \frac{(n-1)!}{(1-X)^n} = \sum_{p=0}^{+\infty}(p+n-1)..(p+1)X^p$.
Ainsi en associant les deux on obtient :

$$a_p = \frac{(p+n-1)...(p+1)}{(n-1)!} = \binom{p}{p+n-1}$$

Notes :

✓ **A l'oral**, on ne fait pas le lemme. Il faut introduire l'action dès le début. Dire les étapes à l'oral mais ne pas les écrire car sinon lemme + étapes = beaucoup avant de commencer vraiment.
✓ Il faut savoir justifier pourquoi V doit être de dimension finie (car sinon tr n'existe pas...)
✓ X est un scalaire ! (du coup on se moque de l'ordre gX ou Xg).
✓ Le développement peut se réécrire avec le vocabulaire des représentations.
✓ Avec le vocabulaire des séries formelles, se remet sans problème dans 101, 107, 124, 151, 152.
♣ Theodor Molien (1861 - 1941) est un mathématicien germano-balte. Il étudiait les algèbres commutatives et les polynômes invariants de groupes finis.