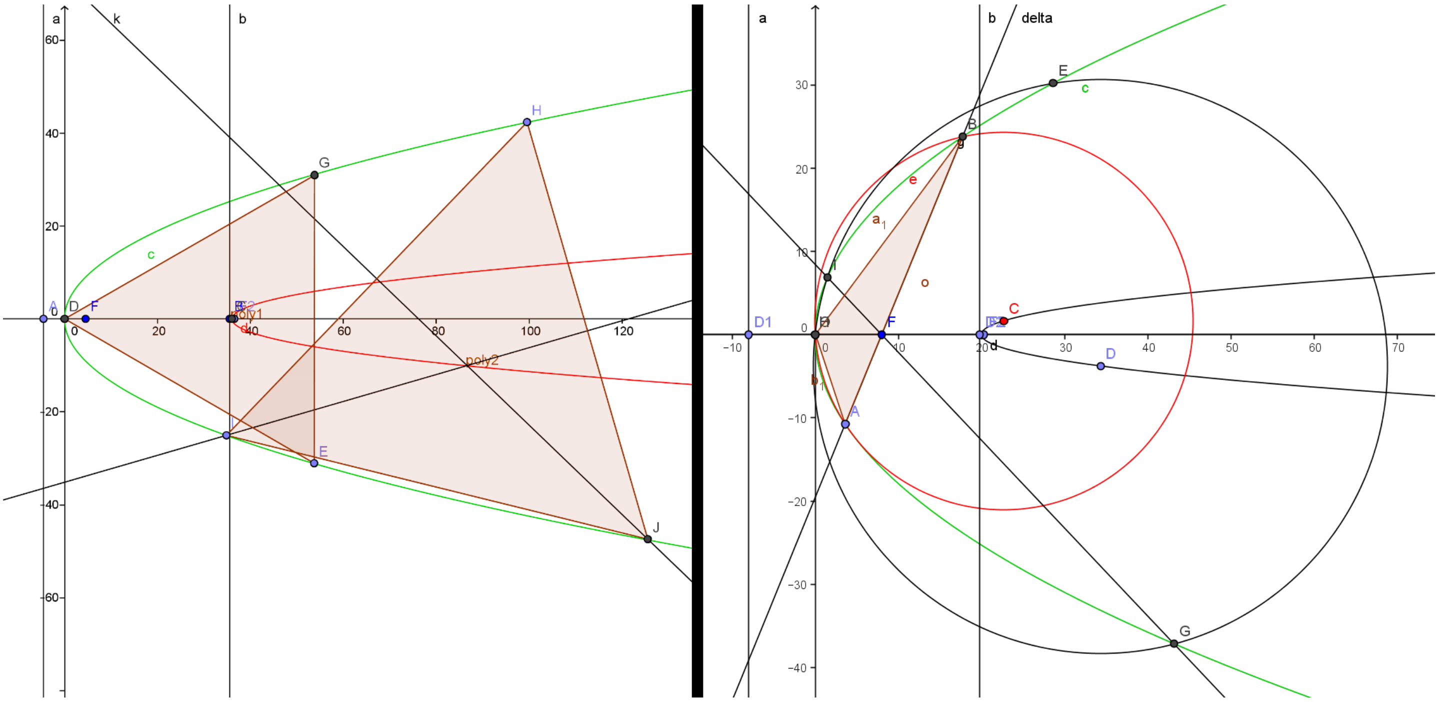
Des centres de trucs inscrits à des paraboles

Référence : FGNAL3 exo 4.26 et 4.27 p.280
Leçons : 180.



Proposition

On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2px$. Son foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

1. L'ensemble des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la parabole décrivent une autre parabole !
2. une droite Δ passant par le foyer coupe $(\mathcal{P})$ en A et B. L'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles OAB décrivent une autre parabole !

Preuve :

1. **Condition nécessaire** Pour $i \in [\![1,3]\!]$, soit $M_i = \left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ 3 points distincts de la parabole. Posons

$$G = \left(\underbrace{\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{6p}}_{a}, \underbrace{\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}_{b}\right)$$ le centre de gravité du triangle.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral ssi G est aussi l'orthocentre du triangle ssi $\overrightarrow{GM_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}$; $\overrightarrow{GM_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{GM_3} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.
On va expliciter le premier cas et les autres s'obtiendront par permutation circulaire.

$$\left(\frac{y_1^2}{2p} - a\right)\left(\frac{y_3^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right) + (y_1 - b)(y_3 - y_2) = 0$$

ce qui se réecrit, comme $y_3 \neq y_2$:

$$\left(y_1^2 - 2pa\right)(y_3 + y_2) + 4p^2(y_1 - b) = \left(y_1^2 - 2pa\right)(3b - y_1) + 4p^2(y_1 - b) = 0$$

On obtient les mêmes équations sur y_1 et y_2 ce qui nous dit que finalement les y_i sont racines de

$$P = X^3 - 3bX^2 - (2pa + 4p^2)X + (4p^2b + 6pab)$$

Les fonctions symétriques élémentaires sur ce polynôme sont

$$\sigma_1 = 3b = y_1 + y_2 + y_3 \qquad \sigma_2 = -(2pa + 4p^2) = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 \qquad \sigma_3 = 4p^2b + 6pab = y_1y_2y_3$$

Donc $6ap = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9b^2 + 4ap + 8p^2$
donc $a = \dfrac{9}{2p}b^2 + 4p$.

Condition suffisante Soit $G = (a, b)$ où $a = \dfrac{9}{2p}b^2 + 4p$.

Considérons y_1, y_2 et y_3 les racines de P. Elles sont a priori complexes. Admettons provisoirement qu'elles sont réelles.

On peut vérifier que les points $M_i = \left(\dfrac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ forment un triangle équilatéral (manip inverse à précedemment).

Il suffit maintenant de vérifier que pour tout réel b le polynôme $P = X^3 - 3bX^2 - (9b^2 + 12p^2)X + (27b^3 + 28p^2b)$ possède 3 racines distinctes réelles.

Son polynôme dérivé est $P' = 3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)$. Les racines de P' sont $\dfrac{6b \pm \sqrt{36b^2 + 12(9b^2 + 12p^2)}}{6} = b \pm 2\sqrt{b^2 + p^2}$ ie l'une est positive l'autre négative. Le polynôme P a trois racines réelles distinces ssi [1]

$$P(b + 2\sqrt{b^2 + p^2})P(b - 2\sqrt{b^2 + p^2}) < 0$$

Pour faire ce calcul on divise P par P'

$$\begin{aligned}
P &= X^3 - 3bX^2 - (9b^2 + 12p^2)X + (27b^3 + 28p^2b) \\
&= \frac{1}{3}X\left[3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)\right] + 2bX^2 + (3b^2 + 4p^2)X - 3bX^2 - (9b^2 + 12p^2)X + (27b^3 + 28p^2b) \\
&= \frac{1}{3}X\left[3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)\right] - bX^2 - (6b^2 + 8p^2)X + (27b^3 + 28p^2b) \\
&= \left(\frac{1}{3}X - \frac{b}{3}\right)\left[3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)\right] - 2b^2X - (3b^3 + 4bp^2) - (6b^2 + 8p^2)X + (27b^3 + 28p^2b) \\
&= \left(\frac{1}{3}X - \frac{b}{3}\right)\left[3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)\right] - 8(b^2 + p^2)(X - 3b)
\end{aligned}$$

Donc on regarde le signe de

$$\begin{aligned}
8^2(b^2 + p^2)^2(b + 2\sqrt{b^2 + p^2} - 3b)(b - 2\sqrt{b^2 + p^2} - 3b) &= 8^2(b^2 + p^2)^2(-2b + 2\sqrt{b^2 + p^2})(-2b - 2\sqrt{b^2 + p^2}) \\
&= 8^2(b^2 + p^2)^2(4b^2 - 4(b^2 + p^2)) \\
&= 8^2(b^2 + p^2)^2(-4p^2) < 0
\end{aligned}$$

Le polynôme a trois racines réelles distinctes. Donc c'est bon.

Le lieu cherché est donc la parabole d'équation $x = \dfrac{9}{2p}y^2 + 4p$ ie $y^2 = \dfrac{2p}{9}(x - 4p)$ qui est une parabole parallèle à la première, de même axe (on a juste translaté et dilaté) et de sommet $(4p, 0)$.

2. On écarte le cas ou Δ est l'axe de la parabole car elle ne coupe $\mathcal{P}$ qu'en un point.
Δ a donc pour équation $x - \dfrac{p}{2} = my$ pour $y \in \mathbb{R}$. Les coordonnées de A et B sont $\left(\dfrac{y^2}{2p}, y\right)$ où $y = b$ ou $y = a$. Mais A et B appartiennent à Δ donc a et b sont solutions de

$$y^2 - 2pmy - p^2 = 0$$

ie on a $ab = -p^2$ et $a + b = 2pm$.
Soit $\Omega(x', y')$ le centre du cercle circonscrit au triangle OAB. Il appartient à la médiatrice de $[OA]$ qui a pour équation [2]

$$y = -\frac{a}{2p}x + \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)$$

1. cf dessin note
2. Posons l'équation de la médiatrice de la forme $y = \alpha x + \beta$. On sait que le vecteur directeur de cette droite qui a pour coordonnées $(1, \alpha)$ doit être orthogonal à (OA) ie $\dfrac{a^2}{2p} \times 1 + \alpha \times a = 0$ donc $\alpha = -\dfrac{a}{2p}$. Le point milieu de $[OA]$ qui a pour coordonnées $\left(\dfrac{a^2}{4p}, \dfrac{a}{2}\right)$ appartient à la médiatrice donc $\dfrac{a}{2} = -\dfrac{a}{2p}\dfrac{a^2}{4p} + \beta$. Donc $\beta = \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{a^2}{4p^2}\right)$. L'équation est donc $y = -\dfrac{a}{2p}x + \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{a^2}{4p^2}\right)$

De même la médiatrice de $[OB]$ a pour équation

$$y = -\frac{b}{2p}x + \frac{b}{2}\left(1 + \frac{b^2}{4p^2}\right)$$

$\Omega(x', y')$ appartenant aux deux médiatrices il vient

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{2p}x' + \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right) &= -\frac{b}{2p}x' + \frac{b}{2}\left(1 + \frac{b^2}{4p^2}\right) \\
\frac{x'}{p}(b-a) &= b\left(1 + \frac{b^2}{4p^2}\right) - a\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right) = b - a + \frac{b^3 - a^3}{4p^2} \\
x' &= p + \frac{b^3 - a^3}{4p(b-a)} = p + \frac{a^2 + ab + b^2}{4p} = p + \frac{(a+b)^2 - ab}{4p} \\
&= p + \frac{4p^2m^2 + p^2}{4p} = p + p\frac{4m^2 + 1}{4} = pm^2 + \frac{5p}{4}
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{b}{2p}pm^2 - \frac{b}{2p}\frac{5p}{4} + \frac{b}{2}\left(1 + \frac{b^2}{4p^2}\right) \\
&= \frac{b}{8}\left[-4m^2 - 1 + \frac{b^2}{p^2}\right] \\
&= \frac{b}{8}\left[-\frac{(b+a)^2}{p^2} - 1 + \frac{b^2}{p^2}\right] \\
&= \frac{b}{8p^2}\left[-2ab - a^2 - p^2\right] \\
&= \frac{-b}{8ab}\left[-2ab - a^2 + ab\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[b + a\right] = \frac{pm}{4}
\end{aligned}$$

En fait ici on pouvait faire beaucoup plus astucieux en soustrayant et additionnant les 2 équations des médiatrices. Il faut s'en rappeler car ces 2 calculs sont vraiment affreux.
Finalement on a obtenu

$$x' = \frac{16}{p}y^2 + \frac{5p}{4}$$

Et donc Ω appartient à une nouvelle parabole. Comme m décrit $\mathbb{R}$ lorsque l'on fait varier Δ il en est de même de y' donc on en obtient bien la nouvelle parabole en entier. Cette parabole a le même axe que $(\mathcal{P})$ d'origine. C'est normal par symétrie.

■

Notes :

✓ **A l'oral**, bla
✓ Il suffit de regarder pour les changements de pente ce qu'il se passe, de quel signe sont les valeurs. C'est pretty clair sur un dessin :