PARTITIONS D'UN ENTIER EN PARTS FIXÉES

Référence : FGNAN2 : exercice 3.15
Leçons : 140, 243 [1], 124, 126, 190, 230

THÉORÈME

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \operatorname{Card}\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \middle| a_1x_1 + \ldots + a_kx_k = n\right\}$.
Alors on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Preuve :

Étape 1 : Considérons le produit de Cauchy [2] des k séries formelles $\displaystyle\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_ix_i}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$.

On note $f(X)$ ce produit de Cauchy ; on a les égalités suivantes :

$$f(X) = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_ix_i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k\\ a_1x_1+\ldots+a_kx_k=n}} 1\right)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_nX^n$$

Étape 2 : Décomposons la fraction rationnelle $f(X)$ en éléments simples.

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $a_1^{\text{èmes}}$, ..., $a_k^{\text{èmes}}$ de l'unité car $f(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-X^{a_i}}$.

Le pôle 1 est de multiplicité k.

Regardons la multiplicité des autres pôles.

Soit $\omega \neq 1$ un pôle de f. Comme $\dfrac{1}{1-X^{a_i}}$, où $i \in [\![1, k]\!]$, n'a que des pôles simples, ω est de multiplicité inférieure ou égale à k. Par l'absurde, on suppose que ω soit un pôle de multiplicité k.

On aurait alors : $\forall i \in [\![1, k]\!], \omega^{a_i} = 1$.

Or, d'après le théorème de Bezout, les $(a_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ étant premiers entre eux dans leur ensemble :

$$\exists\, (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1u_1 + \ldots + a_ku_k = 1$$

Alors $\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_iu_i} = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(\omega^{a_i})^{u_i} = 1$.

Contradiction ! On en déduit donc que la multiplicité du pôle $\omega \neq 1$ est strictement inférieure à k.

Notons $\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de $f(X)$, avec $\omega_1 = 1$.

Par décomposition en éléments simples, il existe $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, $j \in [\![1, k-1]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que [3] :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1-X)^k} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

1. Pour la leçon 243, il faut travailler avec des séries entières à la place des séries formelles. Leur rayon de convergence est systématiquement égal à 1 et les résultats obtenus sont valides pour $|z| < 1$.
2. Le produit de Cauchy n'est pas trivial. Si on veut s'en convaincre on met $\sum \alpha_{\omega_i}X^{\omega_i}$ où $\alpha_{\omega_i} = 0$ si ω_i n'est pas un multiple de x_i.
3. On fait bien commencer la somme à $i = 1$ car il n'y a pas que $(1-X)^k$ mais tous les $(1-X)^{\text{“}<k\text{”}}$

Étape 3 : Développons en série formelle les éléments simples de $f(X)$.

En effet, pour $\omega \in \mathcal{P}$ et $j \in [\![1,k]\!]$, $\dfrac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle. Ses coefficients s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série formelle de $\dfrac{1}{\omega - X}$.

On a :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{X}{\omega}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Puis, pour $j \in [\![1,k]\!]$,

$$\left(\frac{1}{\omega - X}\right)^{(j)} = \frac{(j-1)!}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+2)\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty}\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!}\frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi :

$$f(X) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}X^n + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{i,j}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{X^n}{\omega^{n+j}}\right)$$

Étape 4 : Déduisons-en un équivalent de u_n en l'infini.

La dernière expression de $f(X)$ nous fournit, par unicité du développement en série formelle :

$$u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dbinom{n+r-1}{n} = \dfrac{(n+r-1)\dots(n+1)}{(r-1)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.

Ainsi, $\alpha\dbinom{n+r-1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$

Et $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1;k-1]\!], c_{i,j}\dbinom{n+j-1}{n}\dfrac{1}{\omega^{n+j}} = o\left(n^{k-1}\right)$, car les pôles de $\mathcal{P}$ sont des racines de l'unité, donc de module 1.

Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Reste à calculer α.

Pour cela, on multiplie $f(X)$ par $(1-X)^k$ et on substitue 1 à X :

$$(1-X)^k f(X) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+X+\ldots+X^{a_i-1}}$$

$$\alpha + 0 = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}$$

D'où :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1\dots a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

■

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, 13'04 en speedant

✓ Calculer le nombre de manières pour obtenir 100€ en billets de 5, pièces de 1 et 2.