Processus de Galton-Watson

Référence : A peu près : Benaïm El-Karoui : Promenade aléatoire [BEN] p. 153 et Cottrel etc. Exercices de probabilités [COT] p. 72
Lecons : 206, 223, 226, 229, 241, 243, 253, 260, 261, 264

Problème

Cadre : De nombreux phénomènes d'évolution de population peuvent être modélisés en première approximation par un processus de branchement (réactions nucléaires en chaine, étude des gènes, survivance des noms de famille...).

Modélisation mathématique :
Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{p_k = \mathbb{P}(X = k)}$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k < \infty$.
Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de va iid, suivant la loi $\mathbb{P}_X$.
On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$$

On définit

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0) \ ; \ \mathbb{P}_{\text{ext}} := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$$

Lien avec les individus
Des particules sont capables de générer des particules de la même famille.
Chaque particule a la probabilité p_k d'engendrer k particules indépendantes (cette probabilité est constante au cours des générations).
Une particule originale représente la génération 0. Les descendants de la n-ième génération forment la $(n+1)$-ième génération.
Z_n est le nombre d'individus à la génération n.
Chaque individu i de la n-ième génération a un nombre $X_{i,n}$ de descendants $(1 \leqslant i \leqslant Z_n)$ (logique donc que les $X_{i,n}$ soient iid).
π_n est la probabilité d'extinction à la génération n.
$\mathbb{P}_{\text{ext}}$ est la probabilité d'extinction de la population.
Ce développement étudie la suite (Z_n), en particulier s'il existe un n tel que $Z_n = 0$, la population s'éteint.

Hypothèses
Si $p_0 = 0$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n \geqslant 1$ ps et $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 0$ (par exemple si $X = 1$ p.s. alors $p_1 = 1$ et p_0=0).
.
Si $p_0 = 1$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = 0$ ps et $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 1$.
On suppose donc désormais $p_0 \in]0, 1[$.

1 Fonction génératrice de X

Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, on définit la fonction génératrice de X par

$$\boxed{G(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k} \leqslant 1$$

Comme somme de probabilités, $\boxed{G(1) = 1}$.

Proposition 1

1. G est bien définie sur $[0,1]$ et y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) G est strictement croissante sur $]0,1[$.
   (b) G est convexe sur $]0,1[$.
   (c) G est strictement convexe sur $]0,1[\Leftrightarrow p_0+p_1<1$.

Preuve :

1. $\forall k\in\mathbb{N}, s\mapsto p_k s^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k 1^k$ converge (vers 1), et la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 1} kp_k s^{k-1}$ converge normalement (car X est intégrable) donc uniformément sur $[0,1]$.
   Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k s^k$ converge uniformément vers G, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. [COT question 2.] La série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence $\geqslant 1$, on a, par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, :

$$\forall s\in[0,1[, G'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} \text{ et } G''(s)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$$

   Comme $p_0<1$, on a : $\exists k_0>0, p_{k_0}>0$.
   (a) Ainsi : $\forall s\in]0,1[, G'(s)\geqslant k_0 p_{k_0} s^{k_0-1}>0$ et G est strictement croissante sur $]0,1[$.
   (b) Aussi : $\forall s\in]0,1[, G''(s)\geqslant k_0\left(k_0-1\right)p_{k_0}s^{k_0-2}\geqslant 0$ et G est convexe sur $]0,1[$.
   (c) Si $p_0+p_1=1$, alors on a $k_0=1$ et G est affine donc n'est pas strictement convexe sur $]0,1[$.
   Si $p_0+p_1<1$, alors on peut avoir $k_1>1$ tq $p_{k_1}>0$ et $G''>0$ sur $]0,1[$ d'où la stricte convexité.

■

On a $\boxed{m=\mathbb{E}[X]=G'(1).}$

2 Fonction génératrice de Z_n, relation de récurrence

Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $G_n=G_{Z_n}$ la fonction génératrice de Z_n ie $\boxed{G_n(s)=\mathbb{E}[s^{Z_n}]}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(Z_n=k\right)s^k$.

Comme précédemment, on peut montrer que G_n est bien définie sur $[0,1]$.
Déjà, $G_n(0)=\mathbb{P}(Z_n=0)$ donc $\boxed{\pi_n=G_n(0)}$
On obtient également $\boxed{G_n'(1)=\mathbb{E}[Z_n]}$.

Lemme 1

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, pour $i\in\mathbb{N}$, la variable Z_n est indépendante de $X_{i,n}$.

Preuve :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, il vient : Z_n ne dépend que de la famille $(X_{i,j})_{i\geqslant 0, j<n}$.
Et, par indépendance des variables $X_{i,j}$, on obtient que $\forall i\in\mathbb{N}, Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$. ■

Proposition 2

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $G_n=\underbrace{G\circ\cdots\circ G}_{n \text{ fois}}$ (sur $[0,1]$).

Preuve :

(inspiré de [COT] question 1 [1])
On a :

$$G_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = k)s^k$$

On procède par récurrence.
Initialisation : $G_1(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \mathbb{E}[s^{X_{1,0}}] = \mathbb{E}[s^X] = G(s)$
Récurrence : supposons $G_n = G \circ \cdots \circ G$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (tout s'inverse comme on veut -Fubini Tonelli- car c'est } > 0) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (car } Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \perp\!\!\!\perp) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[s^{X}\right]^k \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \text{ ont même loi)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k = G_n(G(s))
\end{aligned}$$

On conclut par hypothèse de récurrence. ■

Ceci nous donne, par récurrence immédiate, $\boxed{\pi_{n+1} = G(\pi_n)}$.

3 Étude de la probabilité d'extinction

3.1 Réécriture et convergence

On remarque que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$, autrement dit la suite d'évènements $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc π_n aussi. Cette suite étant majorée par 1, elle converge en croissant vers une limite $\mathbb{P}_{\text{ext}} \in]0, 1]$ (la stricte positivité de $\mathbb{P}_{\text{ext}}$ résulte de $\mathbb{P}_{\text{ext}} \geqslant \pi_1 = p_0 > 0$, cela signifie que l'extinction est un évènement possible). L'extinction ne se produit pas avec probabilité 1 à la première génération ($p_0 < 1$).
En obtenant des renseignements sur (π_n), on obtiendra donc des renseignements sur la probabilité d'extinction $\mathbb{P}_{\text{ext}}$, le but étant de savoir si elle est égale à 1 ou non.

Proposition 3

La probabilité d'extinction $\mathbb{P}_{\text{ext}}$ est le plus petit point fixe de G.

Preuve :

— Comme, $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$, par continuité de G sur $[0, 1]$, $\mathbb{P}_{\text{ext}} = G(\mathbb{P}_{\text{ext}})$.

1. Salim se complique ici.
On peut également l'écrire avec les probas au lieu des espérances mais c'est trop moche.

— Soit $u > 0$ un autre point fixe de G.
Montrons par récurrence que $\pi_n < u$.
• Par croissance de G, $\pi_1 = p_0 = G(0) \leqslant G(u) = u$.
• si $\pi_n < u$, $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leqslant G(u) = u$.
La récurrence est vérifiée.
Par passage à la limite on a nécessairement que $\mathbb{P}_{\text{ext}}$ est le plus petit point fixe de G sur $]0,1]$.

■

3.2 La population va-t-elle presque sûrement s'éteindre ?

Théorème 1
Si $m \leqslant 1$, alors $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 1$.
Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}_{\text{ext}}$ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

Preuve :

Puisque $G(1) = 1$, le graphe de G coupe la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0,1]$ au moins au point $(1,1)$. On rappelle qu'on a deux cas :
• Si $p_0 + p_1 = 1$, le graphe de G est une droite et ce point d'intersection est le seul puisque $G(0) = p_0 \neq 0$.
• Sinon, G est strictement convexe (Proposition **??**) et il existe au plus[2] un autre point d'intersection sur $]0,1[$.

Rappelons : $G'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n = m$, $G'(0) = p_1$.

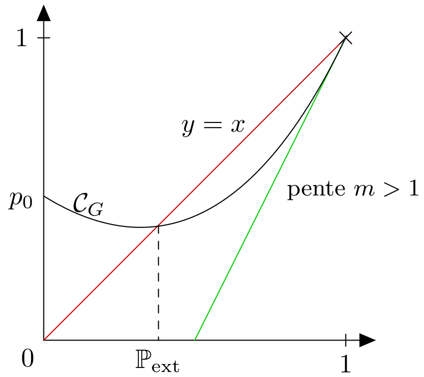

FIGURE 1 : Cas $m > 1$

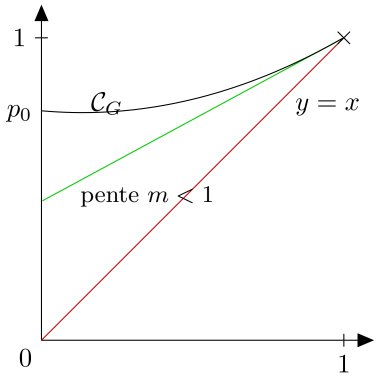

FIGURE 2 : Cas $m < 1$

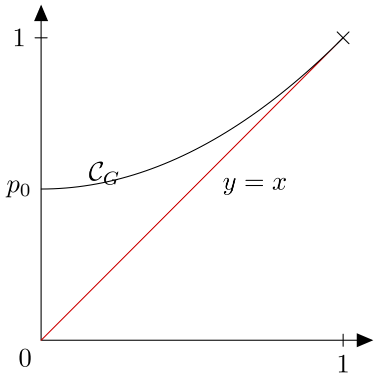

FIGURE 3 : Cas $m = 1$ avec $p_0 + p_1 < 1$

Supposons $m > 1$.
Alors $G' - 1$ est une fonction croissante de $p_1 - 1 < 0$ (car $p_1 = 1 \Rightarrow m = 1$ ou bien plus simplement car $p_0 > 0$) à $m - 1 > 0$, donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$.
La fonction $G - \text{Id}$ est alors décroissante sur $[0,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha,1]$. Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans l'intervalle $]0,\alpha]$ où $G - \text{Id}$ s'annule.
$\mathbb{P}_{\text{ext}}$ est donc l'unique point fixe de G sur l'intervalle $]0,1[$ (car G en a au plus 2).

x	0	$\mathbb{P}_{\text{ext}}$	α		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	0	$+$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0	0			0

2. Par l'absurde, soit y_1 et y_2 ($y_1 < y_2$) deux autres points fixes de G (différents de 1). Posons $f : x \mapsto G(x) - x$. Alors $f(y_1) = f(y_2) = f(1) = 0$ Donc (Rolle) $\exists c_1 \in]y_1, y_2[$, $c_2 \in]y_2, 1[$, tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Donc (Rolle) $\exists c_3 \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c_3) = 0$ (donc $c_3 < 1$. Donc $G''(c_3) = 0$. Absurde car G strictement convexe.

Supposons $m \leqslant 1$**.**

Alors $G' - 1$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, négative ou nulle en 1 ; donc négative sur $[0,1]$.
Donc $G - \mathrm{Id}$ est décroissante sur $[0,1]$, et s'annule en 1. Comme cette fonction admet au plus 2 annulations, elle ne s'annule qu'en 1 (car sinon elle s'annulerait sur un intervalle non-réduit à un singleton).
Par conséquent, $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 1$.
Ou bien : [COT]
Pour $s < 1$ on a $G'(s) < 1$ et

$$\int_s^1 G'(x)\mathrm{d}x = 1 - G(s) < 1 - s.$$

c'est à dire $G(s) > s$: le graphe de G est entièrement situé au-dessus de la diagonale sur $[0,1[$ et l'équation $x = G(x)$ n'a que 1 comme racine de sorte que $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 1$.

x	0		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0	$\searrow$	0

■

Petit truc en plus :

Supposons que l'équation $G(x) = x$ admette une solution $0 < p < 1$. On a alors $p = \mathbb{P}_{\text{ext}}$ par la proposition précédente. De plus, puisque $G(p) - p = 0$ et $G(1) - 1 = 0$, le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto G(x) - x$ montre qu'il existe $z \in]p,1[$ tel que $G'(z) = 1$. Comme G est strictement convexe on a nécessairement $m = G'(1) > 1$.

4 Bonus : Espérance de Z_n

On donne ici une première idée de l'évolution de la taille de la population, *i.e.* de la suite Z_n.

Proposition 4

On a $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

Logique avec le théorème **??** lorsque $m \leqslant 1$ et $\mathbb{P}_{\text{ext}} = 1$.

Preuve :

On va raisonner par récurrence.
• $Z_0 = 1$ donc $\mathbb{E}[Z_0] = 1 = m^0$.
• Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

Méthode 1 :

On peut dériver G_n (comme pour G), et on a, pour $s \in [0,1]$,

$$G'_{n+1}(s) = G'(s)(G'_n \circ G(s))$$

Donc en 1 :

$$G'_{n+1}(1) = \mathbb{E}[X](G'_n(G(1)) = mG'_n(1) = m^{n+1}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Z_{n+1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i \leqslant Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i \leqslant Z_n} \mathbb{E}\left[X_{i,n}|Z_n\right]\right] \text{ (FT car } \geqslant 0 \text{ ps } \oplus\ \mathbb{1}_{i \leqslant Z_n}\ Z_n\text{-mesurable)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}\left[X_{i,n}\right]\right] \ (X_{i,n} \perp\!\!\!\perp Z_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} m\right] = m\mathbb{E}\left[Z_n\right] = m^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence. ■

Notes :

✓ **A l'oral**, on n'explique pas du tout l'histoire : juste brut de maths (ce sera forcément une question du jury). On va vite sur le **1** (6'), on ne fait pas le lemme du **2** (9'27), on fait le **3**.2 géométriquement (13'51). Temps donné en allant hyper vite.
✓ On parle également de processus de branchement.
✓ En fait, la suite (Z_n) est une chaîne de Markov issue de 1, dont l'espace d'états est dénombrable. L'état 0 est absorbant. La chaîne est transciente. La question est ici de savoir si elle "sort " de $\mathbb{N}$ par 0 ou par l'infini.
✓ À l'origine, ce modèle a été introduit par Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes dans l'Angleterre victorienne.
♣ Francis Galton (1822 - 1911) est un homme de science britannique. Il fut anthropologue, explorateur, géographe, inventeur, météorologue, proto-généticien, psychométricien et statisticien. Il est entre autres fondateur de la psychologie différentielle ou comparée. Il a également mis en place de façon systématique la méthode d'identification des individus par empreintes digitales. Il fut anobli en 1909 et reçut la médaille Copley, décernée par la Royal Society.
♣ Henry Watson (1827 - 1903) est un mathématicien britanique. Il a écrit de nombreux livres sur les mathématiques appliquées à l'électricité et le magnétisme. A ne pas confondre avec George, célèbre pour ses travaux sur les fonctions spéciales.