Projection sur un convexe fermé

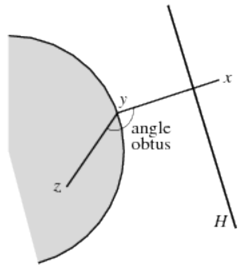
Référence : Hirsch-Lacombe : Elements d'analyse fonctionnelle p.91+ Gourdon : Analyse p.407 (pour existence et unicité)

Théorème

Soient H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non-vide de H. Soit $x \in H$. Alors

(i) $\exists ! y \in C$ vérifiant $\|x-y\| = d(x,C) = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} \|x-z\|$. y est alors noté x_C ou $p(x)$.

(ii) $p(x)$ est caractérisé par $\forall z \in C$, $\Re\mathrm{e}\langle z-p(x), x-p(x)\rangle \leqslant 0$



Preuve :

(i) **Existence :** Notons $\delta = d(x,C) = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} \|x-z\|$. Par définition de δ et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \delta$. On veut montrer que (y_n) converge vers l'élément $y \in C$ recherché. Pour cela, comme H est complet, on va montrer que (y_n) est de Cauchy.
Soient $p,q \in \mathbb{N}$, et appliquons l'égalité du parallélogramme [1] à $(x-y_p)$ et $(x-y_q)$.

$$\begin{aligned} \|(x-y_p)+(x-y_q)\|^2 + \|(x-y_p)-(x-y_q)\|^2 &= 2\left(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2\right) \\ \|2x-y_p-y_q)\|^2 + \|y_q-y_p\|^2 &= 2\left(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2\right) \end{aligned}$$

Comme C est convexe $\frac{y_p+y_q}{2} \in C$ pour tout p et q donc $\left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\| \geqslant \delta$ ie $\|2x-y_p-y_q\|^2 \geqslant \delta^2$.
Et finalement

$$\|y_q-y_p\|^2 \leqslant 2\|x-y_p\|^2 + 2\|x-y_q\|^2 - 4\delta^2$$

Par définition de (y_n), le terme de droite tend vers 0 lorsque $p,q \to \infty$.
Donc (y_n) est de Cauchy. Donc comme H est complet elle converge vers un certain $y \in H$. Mais C est fermé donc $y \in C$ et, par continuité de la norme, $\|x-y\| = d(x,C)$.

Unicité : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $z \in C$ $z \neq y$ tel que $\|x-z\| = d(x,C)$.
On définit la suite (y_n) de C par : $\begin{cases} y & \text{si } n \text{ pair} \\ z & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
Alors (y_n) vérifie $\|x-y_n\| = \delta$ pour tout n donc en particulier $\|x-y_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta$.
Donc par ce qui a été fait précédemment dans l'existence, (y_n) converge donc l'unicité de la limite nous donne $y = z$.

(ii) $p(x)$ **vérifie la propriété :**
Posons donc $z \in C$. Notons pour $t \in]0,1[$

$$z_t = tz + (1-t)p(x) \in C$$

On a

$$\|x-p(x)+t(p(x)-z)\|^2 = \|x-tz-(1-t)p(x)\|^2 = \|x-z_t\|^2 \geqslant \|x-p(x)\|^2$$

1. Je rappelle ici : $\forall x,y \in H,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Soit en développant

$$\begin{aligned}
t^2 \|p(x)-z\|^2 + 2t\Re\mathrm{e}\langle x-p(x), p(x)-z\rangle &\geqslant 0\\
t\|p(x)-z\|^2 - 2\Re\mathrm{e}\langle x-p(x), z-p(x)\rangle &\geqslant 0\\
t\|p(x)-z\|^2 - 2\Re\mathrm{e}\overline{\langle z-p(x), x-p(x)\rangle} &\geqslant 0\\
t\|p(x)-z\|^2 &\geqslant 2\Re\mathrm{e}\langle z-p(x), x-p(x)\rangle
\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0, on a ce que l'on voulait.

$p(x)$ **est le seul élément qui vérifie cette propriété :**
Soit $y \in C$ vérifiant $\forall z \in C, \Re\mathrm{e}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$. Montrons que $y = p(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|x-z\|^2 &= \|(x-y)+(y-z)\|^2\\
&= \|x-y\|^2 + \underbrace{\|y-z\|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\Re\mathrm{e}\langle x-y, y-z\rangle}_{\geqslant 0} \geqslant \|x-y\|^2
\end{aligned}$$

Autrement dit y réalise bien l'$\inf_{z\in\mathbb{C}} \|x-z\|$ donc $y = p(x)$.

■

Corollaire

On a de plus que la projection $p : x \mapsto p(x)$ est 1- lipschitzienne.

Preuve :
Soient $x_1, x_2 \in H$. On cherche à montrer que $\|p(x_1)-p(x_2)\| \leqslant \|x_1-x_2\|$. On a
$\Re\mathrm{e}\langle x_1-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \Re\mathrm{e}\langle x_1-p(x_1)-p(x_2)+p(x_1)+p(x_2)-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle\\
&= \underbrace{\Re\mathrm{e}\langle x_1-p(x_1), p(x_1)-p(x_2)\rangle}_{\geqslant 0} + \underbrace{\Re\mathrm{e}\langle -p(x_2)+p(x_1), p(x_1)-p(x_2)\rangle}_{\|p(x_1)-p(x_2)\|^2} + \underbrace{\Re\mathrm{e}\langle p(x_2)-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle}_{\geqslant 0}\\
&\geqslant \|p(x_1)-p(x_2)\|^2
\end{aligned}$$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\langle x_1-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle| \leqslant \|x_1-x_2\|\,\|p(x_1)-p(x_2)\|$. Donc comme $\Re\mathrm{e}\langle x_1-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle \leqslant |\langle x_1-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle|$; on a

$$\|p(x_1)-p(x_2)\|^2 \leqslant \Re\mathrm{e}\langle x_1-x_2, p(x_1)-p(x_2)\rangle \leqslant \|x_1-x_2\|\,\|p(x_1)-p(x_2)\|$$

Et finalement, en supposant $p(x_1) \neq p(x_2)$ (car sinon c'est évident...)

$$\|p(x_1)-p(x_2)\| \leqslant \|x_1-x_2\|$$

■

Notes :

✓ **A l'oral**, voir si y'a le temps de faire le corollaire. Sans corollaire : 11'23 ou 12'07 avec dessin.
✓ Il est bien de faire un dessin en dimension 2 en projetant sur une boule. Les résultats deviennent alors très géométriques et facilement explicables.
✓ En fait, on a le même résultat dans un espace préhilbertien (muni d'un produit scalaire, non nécessairement complet), à condition de projeter sur un convexe *complet*.