Réduction des endomorphismes normaux

Référence : Gourdon : Algèbre p. 260

Préliminaires

Définition

Soit E un espace hermitien. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si u et u^* commutent.

Le lemme suivant est valable lorsque E est euclidien :

Lemme 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Si F un s.e.v de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
2. Si de plus u est normal et E_λ est un sous-espace propre de u, $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Preuve :

1. Soit $x \in F$.
$$\langle u^*(y), x\rangle = \langle \underbrace{y}_{\in F^\perp}, \underbrace{u(x)}_{\in F}\rangle = 0$$
Donc $u^*(y) \in F^\perp$ ie $F^\perp$ est stable par u^*.
2. Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par [1] u^* donc d'après le **1.**, $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

■

On s'intéresse maintenant au cas réel : on considère dans la suite un espace euclidien E.

Lemme 2

Soit E un espace euclidien de dimension 2 ; $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute BON B de E on a :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \textit{ avec } b \neq 0.$$

Preuve :
Ecrivons :
$$M = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
On a $b \neq 0$ car u est sans valeur propre réelle. Comme u est normal $M^*M = MM^*$, on a donc en particulier (par identification des coefficients) :
$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \textit{ et } ab + cd = ac + bd$$
On a donc $b = c$ ou $b = -c$ par la première assertion Si $b = c$ alors M est symétrique (donc diagonalisable), ce qui est impossible car u est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$. On a donc en reportant dans la seconde assertion $2(a - d)b = 0$ soit $a = d$. ■

1. si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors tout sep de f est stable par g.

Théorème (Réduction des endomorphismes normaux (cas réel))

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une BON B de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \qquad (*)$$

où pour tout i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence forte sur $n = \dim(E)$.
Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer.
Supposons alors le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$ et considérons E un espace euclidien de dimension n. Deux cas se présentent :

- Si u a une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on peut considérer $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et $F = E_\lambda^\perp$. F est stable par u et par u^* **Lemme 1** donc on peut considérer les endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$ qui commutent (car u est normal). Comme $\dim(F) \leqslant n-1$ il existe, par hypothèse de récurrence, une BON B_2 de F telle que $\mathrm{Mat}_{B_1}(u_{|F})$ soit de la forme $(*)$. Alors si B_1 est une BON de E_λ [2] on a que $B = (B_1, B_2)$ est une BON de $E = F^\perp \oplus F$ [3] dans laquelle $\mathrm{Mat}_B(u)$ est de la forme $(*)$.

- Sinon u est sans valeur propre réelle. Idée : se ramener au cas $n = 2$ avec un bon espace.
  Considérons $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible (donc $\alpha^2 - \beta < 0$) du polynôme caractéristique de u (ie $\chi_u = QP$, possible ici car $n \geqslant 2$). Posons $N = \mathrm{Ker}(Q(u))$.

  ◇ Montrons que $N \neq \{0\}$.
  En effet, on peut écrire $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est racine de Q donc de χ_u, donc est une valeur propre complexe de u donc $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Alors on a

  $$\det(Q(u)) = \det(u - \lambda Id) \det(u - \bar{\lambda} Id) = 0$$

  ie $\mathrm{Ker}(Q(u)) \neq \{0\}$.

  ◇ N est stable par u et par u^* (l'écrire, ça vient de u et u^* commutent).
  On peut donc considérer $v = u_{|N}$. On a $v^* = u^*_{|N}$, et ainsi l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)_{|N}$ est symétrique réel donc admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Considérons $x \in N \setminus \{0\}$ un vecteur propre (pour v^*v) associé à μ.

  ◇ Posons $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Comme u n'admet pas de valeur propre réelle, $(x, u(x))$ est une famille libre et donc $\dim(F) = 2$.
  F est stable par u car $x \in N = \mathrm{Ker}(Q(u))$ donc $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x \in F$ $(**)$.
  Montrons que F est aussi stable par u^*. La relation $(**)$ entraine que $F = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x))$ (car $\beta \neq 0$ puisque $\alpha^2 - \beta < 0$).
  On a

  $$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \mu x \in F$$

  et comme u et u^* commutent,

  $$u^*(u^2(x)) = u(u^*u(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$$

  ce qui montre que F est stable par u^* car $(u(x), u^2(x))$ est une base de F.

2. Elle va seulement rajouter un $\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$
3. dimension finie

Comme $\underline{(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}}$, $u_{|F}$ est un endomorphisme normal. Par le **Lemme 2**, dans une BON B_2 de F, $\mathrm{Mat}_{B_2}(u_{|F})$ est de la forme
$$\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Or, $F^\perp$ est stable par $(u^*)^*$ (car F est stable par u^*) et par u^* (car F est stable par u). Donc $(u_{F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$, ce qui prouve que $u_{|F^\perp}$ est normal.
Ainsi par hypothèse de récurrence (car $\dim(F) = n-2$), il existe une BON B_1 de $F^\perp$ telle que $\mathrm{Mat}_{B_1}(u_{|F^\perp})$ soit de la forme $(*)$.

◇ Ainsi la base $B = (B_1, B_2)$ est une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $(*)$.

■

Applications de ce théorème

Définition : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *symétrique* ou *auto-adjoint* si $f = f^*$ (où f^* désigne l'adjoint de f).
f est antisymétrique si $f = -f^*$.

Corollaire : (théorème spectral) : Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une BON de vecteurs propres de f, et les valeurs propres de f sont réelles.

Corollaires :

Réduction des matrices antisymétriques :
1) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M + M^* = 0$. Alors il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}MU = U^*MU = D$ soit diagonale à coefficient diagonaux imaginaires purs.
2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que
$$P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
où les τ_i sont des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$

Réduction des isométries :
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie (c'est à dire qui préserve la norme). Alors il existe une BON B de E dans laquelle la matrice de u a la forme par bloc :
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \varepsilon_s & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$
où pour tout j, $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ et pour tout i $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

Notes :

✓ **A l'oral**, on énonce le **Lemme 1**, mais on démontre le **Lemme 2**, au début.
✓ Attention à l'erreur dans l'énoncé du GOURDON. On a bien une base orthonormale et non juste orthogonale.
✓ Quand a-t-on $u^{**} = u$? Toujours, dès que u^* existe.
✓ Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (et E un espace hermitien). Les assertions suivantes sont équivalentes :
u est normal $\Leftrightarrow$ u se diagonalise dans une BON de E $\Leftrightarrow$ u et u^* se diagonalisent dans une BON commune.
Contre-exemple : Ce théorème n'est plus vrai dans un espace euclidien (considérer par exemple la matrice de rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est normale mais non diagonalisable).