Résultant de deux polynômes et application

Référence : Gourdon : Algèbre p. 208

Lemme

(P et Q ont un facteur commun non constant) $\Leftrightarrow$ ($\exists A, B \in \mathbb{C}[X],\ A \neq 0,\ B \neq 0$ tq $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$)

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons l'existence de $R \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(R) \geqslant 1$ facteur commun de P et Q. Il suffit alors de prendre A et $B \in \mathbb{C}[X]$ tq $P = RB$ et $Q = RA$.
$\Leftarrow$ On va montrer non (1)$\Rightarrow$ non (2). Supposons que P et Q n'aient aucun facteur commun non constant ie $P \wedge Q = \text{cste}$[1]. Si par l'absurde $\exists A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ tq $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$.
On aurait d'après le thm de Gauss $P|B$. Comme $B \neq 0$ on aurait $\deg(B) \geqslant \deg(P) \Rightarrow$ absurde. ■

Théorème

Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. P et Q sont premiers entre eux ssi $\text{Res}(P, Q) \neq 0$.

Preuve :

Pour tout $r \in \mathbb{R}$ on note $\Gamma_r = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ \deg P = r\}$. Posons $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \Gamma_m$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \Gamma_n$.

On sait que Res définie[2] par $\text{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots \\ b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ est définie sur $\Gamma_m \times \Gamma_n$.

D'après le **Lemme**,

1. Si le pgcd de deux polynômes est une constante on dit qu'ils sont premiers entre eux
2. On transpose par rapport à d'hab mais ça ne change rien au det

P et Q ont un facteur commun non constant	$\Leftrightarrow$	$\exists A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ tq $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$
	$\Leftrightarrow$	les vecteurs $(P, XP, \dots, X^{n-1}P)$ et $(Q, XQ, \dots, X^{m-1}Q)$ forment une famille liée de $\mathbb{C}[X]$
	$\Leftrightarrow$	$\det_{\mathcal{B}}(X^{n-1}, \dots, XP, P, X^{m-1}Q, \dots, XQ, Q) = 0$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ ie $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{m+n-1})$
P et Q ne sont pas premiers entre eux	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots \\ b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$

■

Corollaire

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D = \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors l'intérieur $\mathring{D}$ de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble Γ des matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont toutes distinctes.

Preuve :

Etape 1 Montrons $\Gamma \subset \mathring{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \chi_M \text{ n'a que des racines simples} \\ &\Leftrightarrow \chi_M \text{ et } \chi_M' \text{ sont premiers entre eux} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Res}(\chi_M, \chi_M') \neq 0 \end{aligned}$$

Or l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Res}(\chi_M, \chi_M') \end{array}$$

est continue et on vient de voir que $\Gamma = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Γ est ouvert (car φ continue).
Or $\Gamma \subset D$ par définition. Donc $\Gamma \subset \mathring{D}$.

Etape 2 Montrons $\mathring{D} \subset \Gamma$.

Soit $M \in \mathring{D}$. Supposons par l'absurde que $M \notin \Gamma$. Ceci signifie que la matrice M est diagonalisable et qu'elle admet une valeur propre multiple λ. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_3, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & 0 & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $p > 0$ on pose $M_p = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{p} & & & \\ & \lambda & & 0 & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable sinon la restriction de M_p aux deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ qui est $\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{p} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ serait diagonalisable.

Absurde car sinon cette dernière serait semblable à λI_2 donc égale à λI_2.
Mais $PM_pP^{-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$ donc M est limite d'une suite de matrices n'appartenant pas à D donc $M \notin \mathring{D}$.
Absurde. Donc $M \in \Gamma$.

■

Notes :

✓ **A l'oral**, bla
✓ On pourrait montrer que Γ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.