# Théorème de Riesz-Fischer

Référence : Rudin : Analyse réelle et complexe p. 83 et Brézis p. 58

**Contexte** : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
**Prérequis** : Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, déf de $\mathcal{L}^p(\mu)$ (muni de $\|\cdot\|_p$ est un e.v. semi-normé), déf de $L^p(\mu)$ (muni de $\|\cdot\|_p$ est un evn), Lemme de Fatou, inégalité de Minkowski.

**Théorème** (Théorème de Riesz-Fischer - 1907)
Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

**Preuve :**

**Étape 1 :** Montrons que $L^\infty(\mu)$ est complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$.
Donc il existe une famille $(E_{k,m,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'ensembles $\mu$-négligeables, vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \forall x \in X \backslash E_{k,m,n}, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

On définit $E = \bigcup_{k,m,n\in\mathbb{N}^*} E_{k,m,n}$ ; et comme l'union est dénombrable : $\mu(E) = 0$.
Et donc, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \forall x \in X \backslash E, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{0.1}$$

Puis $\forall x \in X\backslash E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}$,
autrement dit : $\forall x \in X\backslash E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.
Et comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge ; on note $f(x)$ sa limite.
On va montrer que la fonction $f$ ainsi définie $\mu$-presque partout est bien dans $L^\infty(\mu)$ et que c'est bien la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en norme $\|.\|_\infty$.
Par passage à la limite dans (0.1), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, \forall x \in X\backslash E, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$.
Comme $L^\infty$ est un espace vectoriel $f = f - f_n + f_n \in L^\infty(\mu)$ Donc : $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

**Étape 2 :** Pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\mu)$ est également complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$.
$\boxed{\text{On va en fait montrer qu'une sous-suite converge dans } L^p(\mu)}$
En effet, prenons $\varepsilon > 0$.
Si d'une part : $\exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K_0, \|f_{n_k} - f\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
et d'autre part : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_0, \|f_n - f_m\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
Alors finalement, en posant $N = \max\{n_{K_0}, N_0\}$ on obtient : $\forall n \geqslant N, \|f - f_n\|_p \leqslant \varepsilon$, et le théorème est prouvé.

Soit donc $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant n_k, \|f_n - f_m\|_p \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.
Notons désormais $\hat{f}_k$ pour $f_{n_k}$, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.
Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$ : $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right|$. Comme $(g_N)$ est une somme de termes positifs, c'est une suite croissante positive donc $(g_N)$ converge simplement vers $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}\right|$ (éventuellement infini).
L'inégalité de Minkowski donne, pour tout $n$ :

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 2$$

Les fonctions $g_n$ étant à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\|g\|_p^p = \int_X |g(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_X \liminf_{n\to\infty} |g_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |g_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 2^p.$$

Donc $g \in L^p(\mu)$. [1]
Soit $x \in X \backslash E$, soit $N \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \geqslant m \geqslant N, \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_m(x)\right| \leqslant \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n-1}(x)\right| + \ldots + \left|\hat{f}_{m+1}(x) - \hat{f}_m(x)\right| = g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x) \tag{0.2}$$

Donc $\forall x \in X\backslash E, \left(\hat{f}_n(x)\right)$ est une suite de Cauchy (car $(g_n(x))$ l'est) dans $\mathbb{C}$ qui est complet donc elle converge ; on note $\hat{f}(x)$ sa limite.
Par passage à la limite dans (0.2) en $n$ (ça ne fait pas bouger $m$) :

$$\forall x \in X\backslash E, \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_m(x)\right|^p \leqslant (g(x) - g_{m-1}(x))^p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_m(x)\right|^p \leqslant g(x)^p$ et $g \in L^p(\mu)$. Donc $(\hat{f} - \hat{f}_m) \in L^p(\mu)$. Comme $L^p$ est un ev, on a bien $\hat{f} \in L^p(\mu)$.
Donc, par convergence dominée, il vient :

$$\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

---

Notes :

✓ **A l'oral**,
✓ Rappel : inégalité de Minkowski. Si $f$ et $g$ sont mesurables, $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$
✓ Rappel : Lemme de Fatou. Si $\forall n > 0$, $f_n : X \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable. Alors

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

♣ Frigyes Riesz (1880-1956) est un mathématicien hongrois. Il fut l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il est à l'origine du théorème de compacité de Riesz et du théorème de représentation de Riesz.
♣ Ernst Fischer (1875 - 1954) est un mathématicien autrichien qui a travaillé à la fois en analyse et en algèbre. Il introduisit la notion de convergence en moyenne quadratique.

1. C'est pour montrer que $g \in L^p(\mu)$ qu'on a besoin d'utiliser Rudin.