$SO_3(\mathbb{R})$ EST SIMPLE

Référence : CALDERO-GERMONI H2G2 p.237 et PERRIN pour les ptits trucs p.143
Leçons : 101,103,106,108,150,160,161,183,203,204

Des petits rappels

1. une symétrie c'est semblable à $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$
2. une réflexion orthogonale, c'est une matrice diagonalisable de spectre $\{-1,1\}$, avec -1 de multiplicité 1.
3. un retournement = un renversement = une rotation d'angle π = une symétrie semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

   ie si $n = 3$ cela donne $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
4. tous les gens de SO_3 sont des rotations.

LEMME 1

Pour $n \geqslant 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Preuve :
(Perrin p.143) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va d'abord montrer que les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$. Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$ et $F_u = \{x \in E | u(x) = x\}$ l'espace de ses points fixes. On pose $p_u = n - \dim F_u$ et on va en fait montrer que u est produit d'au plus p_u réflexions orthogonales. On raisonne par récurrence sur $p_u \in \mathbb{N}$. Le cas $p_u = 0$ est trivial puisqu'il correspond à $u = I_n$. Supposons donc $p_u > 0$; soit $x \in F_u^{\perp} \backslash \{0\}$, et soit $y = u(x)$. Comme $x \notin F_u$, $y \neq x$; et comme F_u et $F_u^{\perp}$ sont u-stables, $y \in F_u^{\perp}$. De plus, $\langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ (car u est une isométrie), donc $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux. Soit alors τ la réflexion orthogonale associée au vecteur $x - y$ (ie telle que $E_{-1} = \text{Vect}\{x - y\}$). On a donc : $\tau(x - y) = y - x$ et $\tau(x + y) = x + y$, d'où, par demi-différence : $\tau(u(x)) = \tau(y) = x$. Aussi, $x - y \in F_u^{\perp}$, ce qui implique sur $\tau_{|F_u} = Id_{F_u}$. En conséquence, $F_u \subset F_{\tau u}$; mais $x \in F_{\tau u} \backslash F_u$, donc $p_u > p_{\tau u}$. On utilise donc notre hypothèse de récurrence sur τu : $\tau u = \tau_1 \ldots \tau_r$, où les τ_i sont des réflexions orthogonales et $r \leqslant p_{\tau u}$. Mais alors on a $u = \tau \tau_1 \ldots \tau_r$ et $r + 1 \leqslant p_u$, ce qui achève la récurrence.
Désormais, soit $u \in SO_n(\mathbb{R})$.
Pour $n = 3$, on conclut alors que les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$: si $u \neq I_3$, alors $u = \tau_1 \tau_2 = (-\tau_1)(-\tau_2)$ et les opposés des réflexions orthogonales sont ici des retournements.
Quand $n \geqslant 3$, il y a encore un peu de travail ; on peut déjà écrire $u = \tau_1 \ldots \tau_{2p}$ avec $2p \leqslant n$, les τ_i étant des réflexions orthogonales. Prenons une paire de réflexions orthogonales τ_1, τ_2 ; alors on peut trouver une paire de retournements σ_1, σ_2 telle que : $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$. En effet : soient H_1 et H_2 les hyperplans laissés fixes par τ_1 et τ_2 et soit V un sev de $H_1 \cap H_2$ qui soit de dimension $n - 3$. Alors $\tau_1 \tau_{2|V} = Id$ et donc $\tau_1 \tau_2 \left(V^{\perp}\right) \subset V^{\perp}$. Mais d'après le cas $n = 3$, on peut écrire $\tau_1 \tau_{2|V^{\perp}} = \sigma_1 \sigma_2$, où les σ_i sont des retournements de $V^{\perp}$. Il ne reste qu'à les prolonger par l'identité sur V, et on a gagné. ■

LEMME 2

$SO_3(\mathbb{R})$ est connexe et compact.

Preuve :

→ Montrons que $SO_3(\mathbb{R})$ est compact (H2G2 p.39). [1]

On a $SO_3(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_3\}) \cap \overset{-1}{\det}(\{1\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array} \right.$ est une application continue.

Aussi, $O_3(\mathbb{R})$ est borné car ses éléments sont des isométries ; donc $SO_3(\mathbb{R})$ est borné.

Ainsi, comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $SO_3(\mathbb{R})$ est compact.

→ Aussi, $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs) (Audin p.66) ; on va montrer qu'on peut relier continûment ses éléments à I_3.

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$, on dispose du résultat de réduction :

$$\exists P \in O_3(\mathbb{R}), M = PU_\theta P^{-1}, \text{ où } U_\theta = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit alors $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & SO_3(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & PU_{t\theta}P^{-1} \end{array} \right.$; γ est un chemin continu reliant M à I_3, et restant dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Donc $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs).

■

Lemme 3

$SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$. [2]

Preuve :

(Perrin p.144) Soient D, D' deux droites de $\mathbb{R}^3$, engendrées par les vecteurs unitaires d et d'.
Soient (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) des bases orthonormales de $D^\perp$ et de $D'^\perp$.
On a donc construit deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$; la matrice de passage P de l'une à l'autre est donc dans $O_3(\mathbb{R})$.
Mais quitte à changer d' en $-d'$, on peut supposer que $P \in SO_3(\mathbb{R})$ (pour que ce soit bien de déterminant 1). ■

Lemme 4

$$Z(SO_n) = \begin{cases} \{I_n, -I_n\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{I_n\} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Preuve :

(Perrin p.142 + H2G2 p.239) En effet, soit $n \geqslant 2$, et $h \in Z(SO_n(\mathbb{R}))$; on va montrer que h est une homothétie car alors $\|h(x)\| = \|x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$; on a : $R_{h(D)} = hR_Dh^{-1} = R_D$, car h est central dnc commute avec tout les gens de SO_3.
Donc h laisse stables toutes les droites de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une homothétie (c'est facile : on prend deux vecteurs non-colinéaires, ce sont des vecteurs propres de h, leur somme également, et on montre que tous les vecteurs sont de même valeur propre.) ■

Théorème

$SO_3(\mathbb{R})$ est un simple.

Preuve :

Soit $H \lhd SO_3(\mathbb{R})$, non-réduit à $\{I_3\}$. Voilà ce qu'on va faire : on va montrer que les retournements de $\mathbb{R}^3$ sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$, puis que H en contient un ; ainsi H les contiendra tous, et comme ils engendrent

1. Notons que la connexité et la compacité de $SO_n(\mathbb{R})$ se montre exactement de la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On a plus généralement que $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension $\leqslant n$

$SO_3(\mathbb{R})$ (**Lemme 1**), on aura $H = SO_3(\mathbb{R})$, d'où la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Soient R_D et $R_{D'}$ deux retournements de $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs D et D'.
Par le **Lemme 3**, il existe $S \in SO_3(\mathbb{R})$ envoyant D sur D'.
Alors $SR_DS^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à R_D, comme R_D semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, SR_DS^{-1} aussi c'est donc un retournement de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x \in D'$, on a : $SR_D \underbrace{S^{-1}x}_{\in D} = SS^{-1}x = x$; ainsi l'axe de SR_DS^{-1} est D', id est : $SR_DS^{-1} = R_{D'}$. On a ainsi montré que tous les retournements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.
Reste à trouver un retournement dans H.
Soit $h \in H$ avec $h \neq I_3$. On pose : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \operatorname{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) \end{array} \right.$.
φ est une application continue, donc $\varphi\left(SO_3(\mathbb{R})\right)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$, un segment $[a, b]$.
$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ donc $\varphi(g)$ est de la forme $1 + 2\cos\theta \leqslant 3$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ (par le théorème de réduction des éléments de $SO_3(\mathbb{R})$).
Comme en plus $\varphi\left(I_3\right) = 3$, on en déduit que $\varphi\left(SO_3(\mathbb{R})\right) = [a, 3]$
Par l'absurde, supposons que $a = 3$.
Alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) = 3$, et donc $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$.
En conséquence, $h \in Z\left(SO_3(\mathbb{R})\right) = \{I_3\}$ (**Lemme 4**), ce qui est exclu.
On a donc bien $a < 3$.
La suite $\left(1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant 3 pour limite croissante, on peut prendre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n} < 3$.
Soit alors $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi\left(g_n\right) = 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n}$ (possible par définition de l'image de φ).
On pose $h_n = g_nhg_n^{-1}h^{-1}$; $h_n \in H$, car H est conjugué dans $SO_3(\mathbb{R})$ et car $h \in H$.
Comme tr $h_n = 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n}$, on obtient que h_n est une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{n}$; ainsi $h_n^n \in H$ est une rotation d'angle π, autrement dit, un retournement. Ce qui conclut la preuve. ■

Notes :

✓ **A l'oral**, 12'30 en prenant temps. Rajouter éventuellement le centre ou l'action transitive.