Théorème de Sarkowski

Camille Francini - Laura Gay
d'après Simon André - Quentin Garchery

Référence : Francinou-Gianella-Nicolas : Oraux X-ENS : Analyse 1
Lecons : 204, 223, 226.

Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue.

Lemme 1

Si K est un segment inclus dans $f(I)$ alors il existe un segment L inclus dans I tel que $K = f(L)$

Preuve :

On pose $K = [\alpha, \beta]$. Comme $K \subset f(I)$, il existe $(a, b) \in I^2$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$ alors $K = \{\alpha\}$ et le singleton $L = \{a\}$ convient.
On suppose donc $\alpha \neq \beta$ et $a \neq b$. On suppose $a < b$.
Idée : prendre dans $[a, b]$ un antécédent u de α et un antécédent v de β tels qu'entre u et v il n'y ait plus d'autres antécédents de α ni de β.
On considère pour cela $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) = \beta\}$. C'est un fermé non vide ($b \in A$) et minoré par a. Soit $v = \min\{x \in A\}$.
On a $f(v) = \beta$ et pour tout $t \in [a, v]$, $f(t) < \beta$ d'après le TVI (car $f(a) = \alpha < \beta$).
Soit alors $B = \{x \in [a, v] \ / \ f(x) = \alpha\}$. Par continuité de f, c'est un fermé non vide majoré par v. Soit $u = \max\{x \in B\}$.
On a alors $u < v$ et $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. On prend $L = [u, v]$.
Le cas $a > b$ se traite avec $u = \max\{x \in [b, a] \ / \ f(x) = \beta\}$ et $v = \min\{x \in [u, a] \ / \ f(x) = \alpha\}$ ■

Lemme 2

S'il existe n segments $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ inclus dans I tels que : $\begin{cases} I_0 \subset f(I_{n-1}) & \\ I_{k+1} \subset f(I_k) & \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$
Alors $f^n = f \circ \cdots \circ f$ a un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Preuve :

Cas $n = 1$ On a par hypothèse un segment $I_0 = [a, b]$ tel que $I_0 \subset f(I_0)$.
En particulier, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. La fonction $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(\beta) \geqslant 0$ et $g(\alpha) \leqslant 0$ et elle est continue donc s'annule d'après le TVI. Donc f a un point fixe dans I_0.

Cas $n = 2$ On a $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$, donc $I_0 \subset f^2(I_0)$.
Par le cas $n = 1$, f^2 a donc un point fixe x_0 dans I_0, mais a priori on ne sait pas si $f(x_0) \in I_1$. C'est là que le **Lemme 1** intervient : il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J_1)$. On a donc $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. Par le même argument que précédemment, il existe $x_0 \in J_1$ tel que $f^2(x_0) = x_0$, et cette fois on peut conclure : $x_0 \in J_1$ donc $f(x_0) \in I_1$.

Cas général $n > 3$ On procède de la même manière en itérant.
Comme on a $I_1 \subset f(I_0)$, on choisit $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. On choisit $J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$. De proche en proche, on construit ainsi une suite finie de segments

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset ... \subset J_1 \subset I_0$$

tels que $f^k(J_k) = I_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
On a alors $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$. D'après le **Lemme 1**, il existe donc $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 = f^n(J_n)$.
Comme $J_n \subset f^n(J_n)$, il existe donc un point fixe x_0 de f^n dans J_n. Par construction des intervalles J_k, $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

■

Définition

On dit que $x \in I$ est de période $n \geqslant 2$ si $f^n(x) = x$ et si $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, ..., n-1\}$. On dit que x est de période 1 si c'est un point fixe de f.

Théorème (*Sarkowski-1964*)

On suppose qu'il existe un point de période 3. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un point de période n.

Preuve :

Pour simplifier si I_1 et I_2 sont tels que $I_1 \subset f(I_2)$, on notera $I_1 \to I_2$. Le **Lemme 2** nous dit que si on a un cycle $I_0 \to I_{n-1} \to \cdots \to I_1 \to I_0$ alors f^n admet un point fixe x_0 dans I_0 vérifiant $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Par hypothèse f admet un point 3-périodique a. On pose $b = f(a)$ et $c = f(b) = f^2(a)$. Alors b et c sont aussi 3-périodiques et quitte à remplacer a par b et c on prend $a = \min(a, b, c)$.

• On suppose $\underline{a < b < c}$
On pose $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$, $I_1 \subset f(I_0)$ ie $I_1 \to I_0$. De même, on a $I_0 \subset f(I_1) = [a, c]$, donc $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_1$. La dernière inclusion montre que f admet un point fixe dans I_1.
De même, le cycle $I_0 \to I_1 \to I_0$ montre que f^2 a un point fixe x_0 dans I_0 tel que $f(x_0) \in I_1$. Comme $x_0 \neq b$, $x_0 \notin I_1$ et donc $x_0 \neq f(x_0)$. Ainsi, x_0 est 2-périodique.
Soit maintenant $n \geqslant 4$. On écrit le cycle $I_0 \to \underbrace{I_1 \to \cdots \to I_1}_{n-1 \text{ fois}} \to I_0$. D'après le **Lemme 2**, f^n admet un point fixe $x \in I_0$ tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k < n$. x ne peut être égal à b (sinon $\exists k < n$ tel que $f^k(x) = a \notin I_1$) et donc x est n-périodique.

• Si $\underline{a < c < b}$
On pose $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. On a cette fois $I_1 \to I_0$, $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. On reprend le même raisonnement que précédemment en échangeant I_0 et I_1.
On a donc montré dans tous les cas que f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$. ■

Notes :

✓ Il est indispensable que I soit stable par f, comme on le voit avec le contre-exemple suivant : on prend $I = [0, a[\subset [0, 1[$ et $f : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On constate que $f^3(x) = x$ pour tout x dans l'intervalle I, donc tout point de I est de période au plus 3, donc il n'existe aucun point de période plus grande que 3.
✓ Le théorème n'est plus vrai en dimension supérieure. Par exemple, la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ n'a que des points de période 3 sur le cercle unité.
✓ Pour construire une fonction périodique de période 3, il suffit de faire une interpolation de Lagrange pour construire un polynôme P vérifiant par exemple $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 0$.
♣ Oleksandr Mykolaiovych Sharkovsky (1936 -) est un mathématicien ukrainien principalement connu pour ce théorème. Il est à la tête du département de théorie des systèmes dynamiques de l'institut mathématique de l'académie national des sciences d'Ukraine.