Simplicité de SO_3

Référence : FGNal3 exercice 1.37 p.67 édition 2008 (+exo 1.33 p61 pour le bonus)

Rappels et notations

On note $O_3 := O_3(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAA = \mathrm{Id}\} < GL_3(\mathbb{R})$.

Proposition 1

L'ensemble $SO_3 := SO_3(\mathbb{R}) = \{A \in O_3(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$ est un groupe, il est distingué dans O_3. C'est l'ensemble des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

On notera sous forme multiplicative la composée de deux éléments de SO_3

Proposition 2

Soit $A \in SO_3$. Alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

On a également que SO_3 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'evn.

Démonstration

Soit G un sous-groupe distingué de SO_3, et soit G_0 la composante connexe par arcs dans G de l'identité.

Lemme

Si de plus G est connexe par arcs et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ alors $G = SO_3$.

Preuve :

On va montrer que G contient un retournement (une rotation d'angle π). On en déduira alors que $G = SO_3$.
• Soit $g \in SO_3$. On note θ_g l'angle de cette rotation [1]. Nous savons qu'il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_g & -\sin\theta_g & 0 \\ \sin\theta_g & \cos\theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\mathrm{tr}(g) = 1 + 2\cos\theta_g$, donc l'application

$$\phi : \begin{array}{ccl} SO_3 & \longrightarrow & [-1,1] \\ g & \longmapsto & \cos\theta_g = \dfrac{\mathrm{tr}(g)-1}{2} \end{array}$$

est bien définie et continue. Il suffit de montrer que ϕ prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in G$ d'angle π. Cependant, avec l'argument de connexité il va être plus facile de trouver un élément de G d'angle θ tel que

1. θ_g est défini au signe près car si l'on change l'orientation de l'axe de la rotation, l'angle est changé en son opposé

$\cos\theta = 0$. Autrement dit, nous allons prouver que G contient une rotation r d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$. Alors r^2 sera un élément de G d'angle π.

• Cherchons pour commencer un élément $s \in G$ tel que $\phi(s) = \cos\theta_s \leqslant 0$.
Par hypothèse, G possède un élément g différent de Id. Quitte à changer la direction de l'axe de la rotation, on peut supposer que $\theta_g \in]0,\pi]$.
Si $\cos\theta_g \leqslant 0$ ie $\theta_g \in [\pi/2,\pi]$ alors $s = g$ convient.
Sinon, $\theta_g \in]0, \dfrac{\pi}{2}$ et on pose $N = E\left(\dfrac{\pi}{2\theta}\right)$. On a

$$N\theta \leqslant \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \leqslant \pi,$$

donc g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\dfrac{\pi}{2},\pi[$ donc $s = g^{N+1}$ convient.

• Puisque G est connexe par arcs, il existe un chemin γ de G reliant Id à s. L'application

$$\varphi = \phi\circ\gamma : t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\gamma(t)) - 1)$$

est continue puisque tr et γ le sont.
De plus, $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \cos\theta_s \leqslant 0$ par construction de s.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\dfrac{\pi}{2}$ et $R = r^2 \in G$ un angle de π et donc R est donc un retournement et appartient à G.

• Montrons qu'alors $G = SO_3$. Pour tout $g \in SO_3$, l'élément gRg^{-1} est dans G car G est distingué par hypothèse. De plus, $\mathrm{tr}(gRg^{-1}) = \mathrm{tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. SoitΔ l'axe de R. Soit u un vecteur appartenant à Δ, alors $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$ donc gRg^{-1} est le retournement d'axe $g(\Delta)$. Or étant donné une droite D de $\mathbb{R}^3$, il est toujours possible [2] de trouver une rotation g telle que $D = g(\Delta)$ en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle bien choisi [3] Ainsi, G contient tous les retournements. Or SO_3 est engendré par les retournements, ce qui conclut. ■

<u>Preuve de la simplicité de SO_3 :</u>

Étape 1 : Montrons que G_0 est un sous-groupe de SO_3. [4]

Par définition G_0 contient l'identité. Soient g et h deux éléments de G_0. Comme G_0 est connexe également, il existe γ et γ' des chemins de G_0 reliant Id à g et h respectivement. Considérons l'application

$$\gamma'' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \end{array}$$

Déjà, l'application est bien définie car pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \in G$ (G sous-groupe de SO_3).
De plus, l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une application continue sur SO_3 car si l'on identifie un élément g de SO_3 à sa matrice dans la base canonique, les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g.
Enfin, $\gamma''(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi, γ'' est bien un chemin de G reliant Id à gh^{-1} donc $gh^{-1} \in G_0$ [5] donc $G_0 < G$.

Etape 2 : Montrons que $G_0 \lhd SO_3$ [6]

2. C'est en fait l'action transitive de SO_3 sur les droites de $\mathbb{R}^3$
3. N'oublions pas ici que les droites sont vectorielles donc passent toutes par 0.
4. Autre version : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G_0\times G_0 & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$ est continue, et $G_0\times G_0$ étant connexe, on en déduit que l'image de φ est un connexe de G. De plus elle contient l'identité, donc est incluse dans G_0, ce qui montre que G_0 est un sous-groupe de G.
5. Ici, le livre ne prend pas la même définition de composante connexe que celle de notre plan mais cela marche quand même sans soucis. En effet l'ensemble $\gamma''([0,1])$ est un connexe par arcs qui contient Id il est donc inclus dans la composante connexe de Id qui est G_0. Donc $\gamma''(1) \in G_0$.
6. Autre version : Soit $h \in SO_3$, alors l'application

$$\mathrm{Int}_h : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ g \longmapsto hgh^{-1} \end{array}$$

est bien définie. Le même argument que plus haut montre que Int_h envoie G_0 dans G_0, et ce pour tout $h \in SO_3$, ce qui signifie que G_0 est un sous-groupe distingué de SO_3.

Soit $g \in G_0$, γ un chemin de G reliant Id à g et soit $h \in SO_3$. Considérons l'application

$$\gamma' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & h\gamma(t)h^{-1} \end{array}$$

Déjà, l'application est bien définie car comme $G \lhd SO_3$, pour tout $t \in [0,1]$, $h \underbrace{\gamma(t)}_{\in G} h^{-1} \in G$.

L'application γ est continue de même que la multiplication à droite ou à gauche par un élément de SO_3, donc γ' est continue.
Enfin, on a $\gamma'(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma'(1) = hgh^{-1}$. L'application γ' est bien un chemin de G reliant Id et hgh^{-1} donc $hgh^{-1} \in G_0$ et ainsi $G_0 \lhd SO_3$.

Étape 3 : Montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$ ou $G = SO_3$.

• Si $G_0 \neq \{\mathrm{Id}\}$, on peut appliquer le **Lemme** car par définition et par l'étape 2, G_0 est un sous-groupe distingué et connexe par arcs. Donc, $G_0 = SO_3$, donc a fortiori $G = SO_3$.
• Si $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ alors montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$, ce qui terminera la preuve.
• Remarquons que dans ces conditions, toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons. En effet, si g' est dans la composante connexe par arcs de g relié par le chemin γ, alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$. Ainsi, $g^{-1}g' \in G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ donc $g' = g$ et donc toutes les composantes connexes par arc de G sont des singletons.
• Raisonnons par l'absurde et supposons que G contienne un élément $g \neq \mathrm{Id}$. Soit h une rotation quelconque, différente de Id et d'angle θ_h.
Pour tout $t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe et d'angle $t\theta_h$.
L'application $t \mapsto h_t$ est continue car matriciellement elle se traduit dans une certaine base orthonormale par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta_h) & -\sin(t\theta_h) & 0 \\ \sin(t\theta_h) & \cos(t\theta_h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'application $t \in [0,1] \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G (car G est distingué), d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Ainsi, hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arc de g qui est un singleton et donc $hgh^{-1} = g$.
Or, si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$ donc $h(\Delta) = \Delta$ C'est impossible : une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace ! Ainsi $G = \{\mathrm{Id}\}$ ce qui montre la simplicité de G.

■

Bonus

PROPOSITION 3

SO_3 est engendré par les retournements.

Preuve :

Soit $u \in SO_3 \backslash \{\mathrm{Id}\}$. Comme $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ est de dimension 1 (c'est une droite, l'axe de u), on a $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = 2$. Ainsi [7], u s'écrit comme produit de 2 réflexions : $u = s_1 \circ s_2$. Or, si H est un plan de E et s est la réflexion par rapport à H, alors $-s$ est le retournement par rapport à la droite $D = H^{\perp}$. La relation $u = (-s_1) \circ (-s_2)$ montre que u est la composée de 2 retournements. Donc les retournements engendrent SO_3. ■

Notes :

✓ Rappels : un sous-groupe H est distingué dans un groupe G si $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

7. On admet que si $u \in O_3$, u peut s'écrire comme produit de r réflexions où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})$.