Surjectivité de l'exponentielle

Référence : Zavidovique : Un Max de Math p. 49 et p.53

Théorème

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. En particulier, la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve du Théorème

— (question 2) Préliminaire : Montrons déjà que $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. "$\subset$" est triviale. Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Alors M^{-1} est un polynôme en M (avec Cayley-Hamilton par exemple) [1]. Donc a fortiori, M^{-1} est un polynôme en C donc $M \in \mathbb{C}[C]^\times$.

— (question 3) $\mathbb{C}[C]^\times$ est connexe. On montre pour cela qu'il est connexe par arcs.
Soit $M, N \in \mathbb{C}[C]^\times$, alors $P(z) := \det(zM + (1-z)N)$ est un polynôme non nul (car $P(0) = \det(N) \neq 0$) donc l'ensemble Z de ses racines est fini. $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs et contient 0 et 1 donc il existe un chemin γ reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$. Le chemin $\gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ relie alors N à M dans $\mathbb{C}[C]^\times$.

— (questions 1 et 2) Montrons que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[C], +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}[C]^\times, \cdot) \\ X & \longmapsto & \exp(X) \end{array}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.
$\mathbb{C}[C]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie [2] donc est fermé.
Or, si $X \in \mathbb{C}[C]$, $\exp(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} X^k$ est une limite de polynômes en C donc d'éléments de $\mathbb{C}[C]$, donc $\exp(X) \in \mathbb{C}[C]$.
Par ailleurs, $\exp(X) \in GL_n(\mathbb{C})$ car d'inverse $\exp(-X)$, donc l'application est bien définie.
C'est un morphisme de groupes car les éléments de $\mathbb{C}[C]$ commutent, et $\mathbb{C}[C]$ stable par produit.
Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[C]) \subset \mathbb{C}[C]^\times$. But : montrer que c'est un ouvert fermé du connexe $\mathbb{C}[C]^\times$.

—
- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car [3] $\exp(X)$ l'est.
- La différentielle en 0 de φ est donc l'identité qui est bijective.
- $\mathbb{C}[C]^\times$ est ouvert de $\mathbb{C}[C]$. En effet, $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap \underbrace{\det{}^{-1}(\mathbb{R}^*)}_{\text{ouvert}}$.

DONC, d'après le théorème d'inversion locale, φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}[C]$ et un voisinage V de I_n dans $\mathbb{C}[C]^\times$. En particulier, $V = \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C}[C])$.

---

1. Ou plus simplement : Soit μ_M le polynôme minimal d'une matrice M inversible. Supposons que son coefficient constant est nul. Alors μ_M peut s'écrire $\mu_M = XQ$. Comme M est inversible, $\mu_M(M) = MQ(M) = 0$ donc $Q(M) = 0$. Absurdité du polynôme minimal. Donc nécessairement $\mu_M = a_0 + XQ$ avec a_0 non nul. On a donc $M^{-1} = -\frac{1}{a_0} Q(M)$ Gourdon p.178
2. La dimension de $\mathbb{C}[C] \simeq \mathbb{C}[X]/(\mu_C(X))$ est exactement le degré du polynôme minimal $\mu_C(X)$ de C.
3. Détails : φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} \varphi(X+H) &= \exp(X+H) = \exp(X)\exp(H) \\ &= \exp(X)\,(I + H + o(\|H\|)) \\ &= \varphi(X) + \exp(X)H + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Donc φ est différentiable en tout $X \in \mathbb{C}[C]$ et $D\varphi_X$ s'identifie à la multiplication par $\exp(X)$ donc $D\varphi$ est continue, donc φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

— (question 4) Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]^\times$. Pour cela, on va montrer que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est voisinage de chacun de ses points.
Si[4] $A \in \mathbb{C}[C]$, $\exp(A+U) = \exp(A)V$.
Comme $\exp(A)$ est inversible, la multiplication par cette matrice est un difféomorphisme donc est continue. Ainsi, $\exp(A)V$ est un ouvert et donc un voisinage de $\exp(A)$. Or $\exp(A)V \subset \exp(\mathbb{C}[C])$ (par l'égalité du dessus). Donc $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un voisinage de chacun de ses points. Donc $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$.

— (question 5) Montrons maintenant que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un fermé de $\mathbb{C}[C]$. On a (par double inclusion assez facile) :

$$\mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} M \exp(\mathbb{C}[C])$$

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[C])$ est donc fermé, puisque les ensembles $M\exp(\mathbb{C}[C])$ sont ouverts (car toujours $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et la multiplication par un inversible est un difféomorphisme...).

— (question 6) Bilan : $\exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé et ouvert dans le connexe $\mathbb{C}[C]^\times$. Comme $\exp(\mathbb{C}[C])$ est non vide, on a $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^\times$. On a donc, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Donc la surjectivité de l'exponentielle. ■

PROPOSITION

On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Preuve de la Proposition

(question 6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exp(M) = A$, alors $\left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2 = A$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ appartenant à l'ensemble de droite. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$. D'après le théorème, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $\exp(P(C)) = C$. Or, comme C est réelle, $C = \overline{C} = \exp(\overline{P}(C))$, donc $A = C \times \overline{C} = \exp(P(C) + \overline{P}(C))$ car $P(C)$ et $\overline{P}(C)$ commutent. Or $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$, donc la matrice A est bien l'exponentielle d'une matrice réelle. ■

CONTRE-EXEMPLE

$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exp. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = A$, alors si λ est valeur propre de B, $\exp\lambda$ est valeur propre de A donc $\lambda = i\pi + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda \neq \bar{\lambda}$, or B est réelle donc $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de B, donc B est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable, ce qui est absurde.
On pouvait aussi donner une matrice de déterminant négatif, car $\det\exp(B) = \exp(\mathrm{tr}(B)) > 0$ pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notes :

✓ **A l'oral**, on fait la proposition s'il y a le temps.
✓ Rappel : Théorème d'inversion locale. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(a)$ est inversible i.e. $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ qui contient a et un ouvert W qui contient $f(a)$, tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.
✓ Connexe $\Leftrightarrow$ CPA lorsque ouvert d'un evn.

4. Détails : $\exp(A+U) = \exp(A)V$. Soit $E \in U$. On a $\exp(A+E) = \exp(A)\exp(E) \in \exp(A)V$
Réciproquement, soit $F \in V$. Par le difféomorphisme obtenu, $\exists E \in U$ tel que $F = \exp(E)$. Alors, par le même principe $\exp(A)V = \exp(A+E) \in \exp(A+U)$.