Table de $\mathcal{S}_4$

Référence : Peyré : Algèbre discrète de la transformée de Fourier p.229

Théorème

La table de caractères de $\mathcal{S}_4$ est :

	$\boxed{1}$ (1)	$\boxed{6}$ (12)	$\boxed{8}$ (123)	$\boxed{6}$ (1234)	$\boxed{3}$ (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)}$	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Preuve :

Classes de conjugaison

$\mathcal{S}_4$ possède 24 éléments repartis en 5 [1] classes de conjugaison [2]. En effet, il y a :

— Le neutre (1) seul dans sa classe.

— $\binom{4}{2} = 6$ transpositions (12)

— $2 \times \binom{4}{3} = 8$ 3-cycles (123)

— $3 \times 2 = 6$ 4-cycles (1234)

— $\frac{1}{2} \times \binom{4}{2} = 3$ double transpositions [3] (12)(34)

Représentation triviale

Elle est de dimension 1 car elle va dans $\mathbb{C}$. On note son caractère χ_1. Il vaut 1 tout le temps, on complète la première ligne.

Représentation alternée

Elle est de dimension 1 car elle va dans $\mathbb{C}$ et correspond au morphisme de signature ε. On note son caractère χ_ε. On complète la seconde ligne.

Représentation standard

(p. 203) Regardons la représentation naturelle de $\mathcal{S}_4$ sur $\mathbb{C}^4$ obtenue par permutation des vecteurs de base. Le caractère associé χ_{p} est la trace d'une matrice de permutation, c'est-à-dire le nombre de 1 sur la diagonale. Autrement dit $\chi_{\mathrm{p}}(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On a donc $\chi_{\mathrm{p}} = [4, 2, 1, 0, 0]$

Cette représentation laisse $H_0 = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1, 1)\}$ stable. On note H_1 le supplémentaire de H_0. On a $H_1 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^4 \ / \ x_1 + \cdots + x_4 = 0\}$.

Sur H_0, la représentation par permutations est la représentation triviale. On pose $\rho_s = \rho_{\mathrm{p}}|_{H_1}$ la représentation standard. Elle est dimension $3 = 4 - 1$. Il faut vérifier qu'elle est irréductible. Pour cela, on calcule son caractère :

$$\chi_s = \chi_{\mathrm{p}} - \chi_1 = [3, 1, 0, -1, -1]$$

Le calcul nous donne

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{24}\left(1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2\right) = 1$$

χ_s est donc bien irréductible, on complète la troisième ligne.

1. Donc il y aura 5 caractères irréductibles
2. 2 éléments de $\mathcal{S}_4$ sont conjugués ssi ils sont de même type
3. à supports disjoints !

Les 2 dernières

On note n_4 et n_5 les degrés des 2 derniers caractères restants (on en a 3 et on sait qu'il y en a 5). Mais on sait que $\sum n_i^2 = 24$ donc $n_4^2 + n_5^2 = 24 - 1^2 - 1^2 - 3^2 = 13$. Les seuls solutions possibles sont 3 et 2.

L'avant dernière

On va regarder la représentation de morphismes donné par les représentations standard et alternée. On pose $\chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)}$. On sait que le caractère va être de degré $3 \times 1 = 3$.
Par propriétés, on sait que $\chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)} = \chi_s \overline{\chi_\varepsilon} = \chi_s \chi_\varepsilon$. On calcule (4ème ligne), ce caractère est bien différent des autres et on peut faire le calcul pour voir que $\langle \chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)}, \chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)} \rangle = 1$ ie la représentation est irréductible.

La dernière

On sait que le degré du caractère va être 2. On peut donc compléter $\chi_5((1)) = 2$. On remplit ensuite le reste de la ligne par orthogonalité des colonnes.

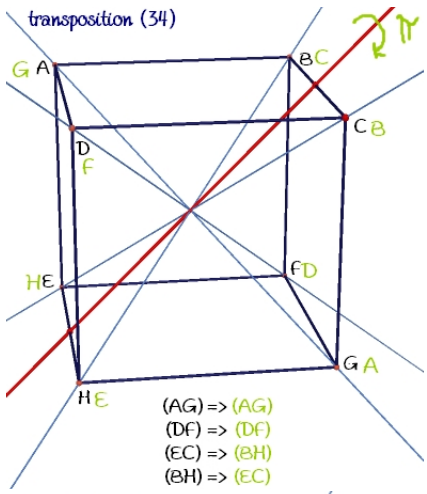
■

Vision géométrique pour $\chi_{\mathbf{Hom}(V_s,V_\varepsilon)}$ (Rauch p.47)

Une des réalisations de $\mathcal{S}_4$ est $\mathrm{Isom}^+(C_6)$. Pour cela on fait agir le groupe $\mathcal{S}_4$ sur les 4 diagonales du cube. On va noter χ_{cube} cette représentation.

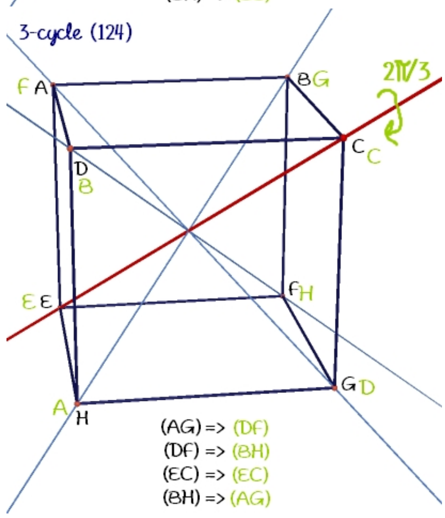
L'identité ...

$$\chi_{\mathrm{cube}}((1)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}) = 3$$



Une transposition s'identifie à un demi-tour (angle $\pm\pi$) autour de la médiatrice commune à deux arêtes symétriques par rapport au centre du cube.

$$\chi_{\mathrm{cube}}((1)) = 1 + 2\cos(\pi) = -1$$

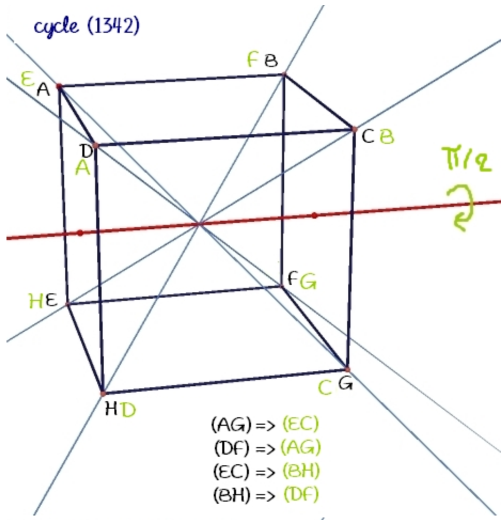


Un 3-cycle est identifié à une rotation d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$ autour de l'une des 4 diagonales du cube.

$$\chi_{\mathrm{cube}}((123)) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

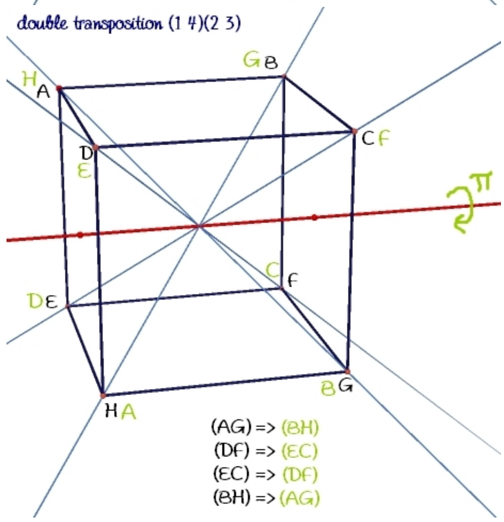
Un 4-cycle s'identifie à une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'un des trois axes quaternaires du cube (axe passant par les centres de deux faces opposées)

$$\chi_{\text{cube}}((1234)) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



Une double transposition est identifiée à un demi-tour (angle $\pm\pi$) autour de l'un des trois axes quaternaires du cube (axe passant par les centres de deux faces opposées)

$$\chi_{\text{cube}}((12)(34)) = 1 + 2\cos(\pi) = -1$$



On obtient bien $\chi_{\text{cube}} = \chi_{\text{Hom}(V_s,V_\varepsilon)} = [3, -1, 0, 1, -1]$.
On calcule $\langle \chi_{\text{cube}}, \chi_{\text{cube}} \rangle$ pour vérifier qu'elle est irréductible.

<u>Notes :</u>

✓ **A l'oral**, on ne peut mettre pas en lemme le fait que 2 éléments sont conjugués ssi ils ont même type (trop long). On fait les classes de conjugaisons directement sur la table. On remplit la table au fur et à mesure.
✓ **Temps :** feutre 11'. ⇒ pour rallonger : table de $\mathcal{S}_3$ (Rauch) ou dire vision géométrique