Valeur principale de $\dfrac{1}{x}$

Référence : Zuily : Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles (sur plusieurs pages)
Leçons : 254,255.

Définition

(p. 23) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Cependant, on peut quand même lui associer une distribution appelée valeur principale de $\dfrac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$. On pose, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$$

On peut montrer que

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(\varphi(x) - \varphi(-x)) dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Proposition 1

$\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est une distribution, d'ordre au plus 1.

Preuve (p. 23) :

Déjà, $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est clairement linéaire.
Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $K \subset [-M, M]$.
Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor, on a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} \varphi'(tx) x \,\mathrm{d}t = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx) \,\mathrm{d}t$$

On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx) \mathrm{d}t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $|\psi(x)| \leqslant \sup_K |\varphi'|$.
On écrit alors

$$\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\varphi(0) \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \psi(x) \,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

D'une part, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est intégrable sur $[\varepsilon, M]$ et impaire, $I_1 = 0$.
D'autre part, le théorème de convergence dominée montre que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} I_2 = \int_{|x| \leqslant M} \psi(x) \,\mathrm{d}x$.
Finalement, $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_{|x| \leqslant M} \psi(x) \,\mathrm{d}x \leqslant C_m \sup_K |\varphi'|$. ■

Proposition 2

$\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est exactement d'ordre 1.

Preuve (p. 23) :

Supposons par l'absurde qu'elle soit d'ordre 0. Alors on aurait l'inégalité :

$$\mathrm{vp}\frac{1}{x} \leqslant C \sup_K |\varphi|$$

Pour $n \geqslant 1$, considérons la suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \varphi_n = 1 \text{ sur } \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \\ \varphi_n = 0 \text{ sur } \left]-\infty, \dfrac{1}{2n}\right] \cup [2, +\infty[\end{cases}$.

Il est facile de voir $\sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi_n| = 1$.

D'autre part, pour $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{2n}$, on a

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$$

Donc

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_n \rangle \geqslant \ln n$$

et on ne peut avoir une inégalité du type de la première.
Contradiction. ∎

Proposition 3

La distribution obtenue vérifie toutes les propriétés de la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$. Au sens des distributions, on a :

1. $x\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$
2. $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$

Preuve :

1. (p. 36) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle x\mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \varphi(x)\mathrm{d}x \overset{1}{=} \int \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle$$

2. (p. 38) La fonction $f(x) = \ln|x|$, pour $x \neq 0$, appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ donc est une distribution tempérée. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} -\ln|x|\,\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{2}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\mathrm{d}x}_{I_\varepsilon}$$

On a :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(-x)\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + [\ln(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) = [\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]\ln\varepsilon - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a, comme dans la preuve de la **Proposition 1**, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec ψ continue.
Donc $\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = -\varepsilon(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon))$. D'où :

$$I_\varepsilon = -\varepsilon \ln \varepsilon[\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)] - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle$$

D'où $\langle f', \varphi\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\dfrac{1}{x}, \varphi \right\rangle$.

■

Remarque : le support de la distribution $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ contient celui de la fonction constante et égale à 1, autrement dit $\mathbb{R}$.

Proposition 4

$\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est tempérée.

Preuve (p. 117) :

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On a : $\displaystyle\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
Idem que précédemment, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec ψ continue et $|\psi(x)| \leqslant \sup\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi'\right|$.
Or $x \mapsto \dfrac{\varphi(0)}{x}$ étant intégrable sur $[\varepsilon, 1]$ et impaire : $\displaystyle\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x = 0$.
Ainsi :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Or, par convergence dominée, on obtient :

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leqslant 1} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Et on en déduit alors :

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle\right| \leqslant 2\sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi'\right| + \left(\int_{|x|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}} |x\varphi(x)|$$

Ce qui montre que $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est tempérée. ■

Proposition 5

On pose $T = \mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$. Alors $\hat{T} = -\mathrm{i}H + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ où $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction de Heaviside (NB : $H' = \delta_0$).

Preuve (p. 117) :

Attention aux conventions...
ne pas le faire. Si vous avez envie, regardez Flo ■

2. convergence dominée cachée ici
2. idem

Notes :

✓ **A l'oral**, on fait ce qui nous arrange selon le temps et la leçon. Prop 1 2 3 +rq =13'12 en lent. Prop 1 2 4 = 12'24 en lent.
✓ Son support singulier est $\mathrm{supp}_{\mathrm{sing}}(\mathrm{vp}\frac{1}{x}) = \{0\}$.
✓ On peut également montrer que $\hat{H} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + \frac{\delta_0}{2}$.
✓ Pour finir le terme "valeur principale" est considéré comme mal adapté pour désigner une distribution car faisant référence à la "valeur principale de Cauchy" qui désigne la valeur qu'on peut assigner à une intégrale impropre. Certains préfèrent parler de "pseudo-fonction" (notée P.F. au lieu de V.P.) ce qui peut être confondu avec la notion de "partie finie" d'une intégrale impropre ....