Programmes Scilab pour l'option Probabilités

Auteur :
Laura GAY

Table des matières

Mettre les références des bouquins quand il y a.

1 Pour faire joli sur les graphes

Pour avoir plusieurs fenêtres de graphes qui s'ouvrent

Code Scilab

```
figure(1)
plot(...)
figure(2)
plot(...)
```

Pour la couleur et les titres des graphes

Code Scilab

```
xlabel('Mon titre en x','FontSize',8) // titre de l'abscisse le 8 est la couleur
ylabel('Mon titre en y','FontSize',8) // titre de l'ordonnée
```

ou encore

Code Scilab

```
plot2d([3:n],[B(3:n) D(3:n)],style=[5 2])
xtitle("Illustration␣de␣la␣consistance␣de␣l'estimateur␣de␣b","n","b_n") //titre du
 graphe
legends(["Valeur␣de␣b_n␣en␣fonction␣de␣n";"Droite␣d'équation␣y=b"],[5 2]) //
attention le deuxième argument est le même que dans le plot
```

legends sans opt demande où est-ce qu'il doit se mettre. On peut rajouter opt='ur' si on le veut en haut à droite par exemple.

Pour demander au jury quel paramètre il veut (un peu inutile)

Code Scilab

```
lambda=input('Entrer la valeur du paramètre lambda : ');
```

Pour afficher un paramètre par exemple en légende du graphe

Code Scilab

```
ECEC string
```

Pour définir exactement la fenêtre du graphe

Code Scilab

```
plot2d(...,rect=[xmin,ymin,xmax,ymax])
```

Pour mettre plusieurs graphiques côte à côte

Code Scilab

```
début du programme
subplot(1,2,1)//premier graphe
    blabla sur le premier plot
subplot(1,2,2)//deuxième graphe
blabla sur le second plot
```

Pour faire une fonction constante par morceaux (par exemple une fonction de répartition)

Code Scilab

```
plot2d2(abscisses,ordonnées,arguments)
```

2 Premiers trucs faciles

2.1 Astuces dans les matrices et les vecteurs

Pour faire une matrice par blocs

Code Scilab

```
x=[1:2]; P=[x 2*x;3*x 4*x]
```

Création d'une matrice ayant n lignes du vecteur x

Code Scilab

```
ones(n,1)*x
```

Pour calculer un produit scalaire

Code Scilab

```
x'*y
```

Pour faire un vecteur de taille 100 qui va de 1 à 8

Code Scilab

```
linspace(1,8,100)
```

Pour faire une matrice tridiagonale

Code Scilab

```
u=zeros(1,5); u(2)=8; //je crée ma sous-diagonale
v=zeros(1,5); v(2)=7; //je crée ma sur-diagonale
Q=3*eye(5,5)+ toeplitz(u,v)//avec le eye je fais ma diagonale
```

Tabul : étant donné un vecteur x je renvoie un vecteur à 2 colonnes avec toutes les occurences de x et le nombre de fois où ils apparaissent

Code Scilab

```
X = [2 8 0 3 7 6 8 7 9 1 6 7 7 2 5 2 2 2 9 7]
m1 = tabul(X) //ordre décroissant je vais avoir un tableau avec à gauche 9 8 etc..
 et à droite le nb d'occurences 2 2 etc..
m2 = tabul(X, "i") //idem en ordre croissant
```

Pour calculer une norme euclidienne d'un vecteur

Code Scilab

```
alea3=2*rand(3,1000)-1;
norme3=diag(alea3'*alea3); //cela calcule x^2+y^2+z^2 pour chaque colonne du
vecteur
```

2.2 Divers

Pour faire une moyenne d'un vecteur

Code Scilab

```
mean(X)
```

Pour ranger un vecteur par ordre décroissant

Code Scilab

```
gsort(X)
```

Pour faire π

Code Scilab

```
%pi
```

Aux valeurs dans grand

Code Scilab

```
grand(m,n,'exp',1/lambda) // moyenne 1/lambda
grand(m,n,'exp',sigma) // écart type sigma
```

Ne pas hésiter à mettre des disp en fin de programme. Par exemple dans la ruine du joueur :

Code Scilab

```
disp('il reste au joueur la somme de '+string(X($))) // on rappelle que $ prend le
 dernier terme
```

3 Pour simuler des variables aléatoires

3.1 Une Cauchy (TP 1)

Il faut utiliser le résultat suivant : si F, la fonction de répartition de X, est inversible et U suit la loi uniforme sur $[0;1]$ alors $F^{-1}(U)$ [1]a même loi que X.
Alors pour une Cauchy, on connait sa densité : $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ et on peut donc aisément calculer sa fonction de répartition $F(t)$ qui est à constantes près une Arctan. Ceci s'inverse facilement. Si on veut montrer la convergence ps d'une Cauchy :

Code Scilab

```
C=tan(%pi*rand(1000,10)+%pi/2);
```

3.2 Une finie (Guide de survie)

Si je veux simuler deux lancers indépendants d'un dé à 6 faces de distribution $\left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12}\right)$

Code Scilab

```
P=[1/6;1/4;1/6;1/6;1/6] // vecteur de taille 5 ! (scilab complète tout seul la
dernière valeur)
grand(2,'mul',1,P) // on utilise la loi multinomiale, le 2 est le nombre d'expé
riences
```

Cela renvoie 2 colonnes (les 2 expériences) et un 1 est présent à la face qui est sortie. On a quelque chose du type $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$.

3.3 Une Bernoulli

Code Scilab

```
B=(rand(1,n)<p)
```

1. Attention, parfois on ne la connait pas !

4 Les convergences (TP 1 et 7)

4.1 Convergence en loi : convergence des fonctions empiriques (Guide de survie)

Code Scilab

```
    function illustration();
                x=grand(1,1000,'nor',0,1); //mon vecteur empirique
                x=tabul(x,'i');//i pour increasing // cf premiers trucs faciles
                x(:,2)=x(:,2)/1000;//normalisation des occurences //la colonne de
droite va être les probas de chaque occurence
                clf;
                //on réprésente alors les fonctions de répartition empiriques,
avec la fonction cumsum
        xx=x(:,1);xxx=x(:,2) //je sépare chaque colonne
        [P,Q]=cdfnor("PQ",xx,zeros(length(xx),1),ones(length(xx),1)); //attention
la moyenne et la variance doivent être de mêmes tailles que X
        F=P //j'extrait ma fonctions de répartitions aux valeurs des occurences
                plot2d(xx,cumsum(xxx),3); //je plot l'empirique
                plot2d(xx,P); //je plote la vraie
                //j'ai utilisé plot2d car je suis à densité mais si j'avais été
discrète j'aurai mis plot2d2 !
                title('Illustration de la convergence des fonctions de répartition
 empiriques','fontsize',4);
                xlabel('Axe des x','fontsize',4);
                ylabel('Axe des y','fontsize',4);
        endfunction;
```

4.2 Loi des grands nombres

C'est très simple, il s'agit juste de tracer le vecteur des sommes cumulées que l'on divise à chaque fois par le n ie on divise par un vecteur allant de 1 en 1 de même taille

Code Scilab

```
plot2d([1:1000],cumsum(grand(1,1000,'exp',2))./[1:1000],4)
```

Attention, ici on n'a fait qu'une seule expérience. Pour voir une convergence presque sûre il faut en faire plusieurs, par exemple 10. Pour cela, on utilise les matrices :

Code Scilab

```
plot2d([1:1000]',cumsum(grand(1000,10,"nor",0,1),'r')./([1: 1000]'*ones(1,10)))
// cumsum(,'r') somme cumulée des colonnes
// cumsum(,'c') somme cumulée des lignes
```

4.3 Théorème central limite

4.3.1 Méthode facile

On fait un histogramme de nos expériences et on superpose à la densité de la Gaussienne.

Code Scilab

```
function TLC(k,n) //k est le nombre de réalisations et n ce qui modélise notre
infini
lambda=2 //donc moyenne = 0.5 variance = 2
clf();
Z=variance*sqrt(n)*(mean(grand(k,n,'exp',0.5),'c')-moyenne); //le terme gauche de
la convergence; ici mean va faire un vecteur colonne avec les moyennes de chaque
ligne donc de chaque réalisation
histplot(100,Z);
z1=min(Z); z2=max(Z);
abcisse=linspace(z1,z2,100)';
plot2d(abcisse,exp(-(abcisse.^2)/2)*(1/sqrt(2*%pi)),5); //tracé de la densité de
la loi N(0,1)
endfunction
```

5 Méthode de rejet (TP 1)

6 Méthode de Monte-Carlo (TP 1 et 2)

6.1 Pour les intégrales

On utilise le résultat suivant (loi des grands nombres) : Si (X_n) suite de va iid de $\mathcal{U}([0,1]^m)$ et $f : [0,1]^m \to \mathbb{R}$ intégrable alors presque sûrement

$$\frac{1}{n}(f(X_1) + \cdots + f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,1]^m} f$$

Par exemple pour $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

Code Scilab

```
alea=rand(1,1000); //on fait nos Xn aléatoires
clf()
plot2d([1:1000], cumsum(4*sqrt(1-alea.^2))./[1:1000],2) //on va montrer la
convergence vers pi
plot2d([1 1000], [%pi %pi], 5)
```

6.2 Algorithme de Métropolis Hastings : théorie (Stage + CMMA)

Il s'agit d'appliquer ici la méthode de Monte Carlo via les chaînes de Markov. Nous détaillons ici cette méthode. Les algorithmes sont disponibles en annexe.
Cette méthode permet d'estimer l'espérance d'une variable aléatoire lorsque la loi est inconnue ou difficile à simuler ce qui est le cas ici.

Rappel :

[Théorème ergodique, Birkhoff] Soit μ une mesure.
Si f est une fonction positive telle que $\mathbb{E}_\mu[f] < \infty$
Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive ;
Si elle admet une mesure μ pour mesure invariante ;
Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\mu[f]$

Notre but va donc être de construire une telle chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ avec pour mesure $\mu_{N,\beta,h}$.

On choisit Q_1 la matrice de transition telle que si ω est une configuration, $Q_1(\omega,\cdot)$ est la loi uniforme sur les configurations qui différent de ω d'au plus un spin.
Comme cette loi est uniforme, elle est symétrique. Alors on a, pour ω et ω' deux configurations :

$$Q_1(\omega,\omega') = Q_1(\omega',\omega)$$

On définit maintenant une nouvelle matrice de transition Q construite ainsi :

$$\forall \omega,\omega' \in \Omega_N, \quad \begin{array}{l} \text{si } \omega' \neq \omega, \quad Q(\omega,\omega') = Q_1(\omega,\omega')\left(1 \wedge \dfrac{\mu_{N,\beta,h}(\omega')}{\mu_{N,\beta,h}(\omega)}\right) \\ \text{sinon}, \quad Q(\omega,\omega) = 1 - \displaystyle\sum_{\omega'\neq\omega} Q(\omega,\omega') \end{array}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega,\omega' \in \Omega_N, \quad \begin{array}{c} Q(\omega,\omega') = \begin{cases} Q_1(\omega,\omega') & \text{si} \quad \mu_{N,\beta,h}(\omega') > \mu_{N,\beta,h}(\omega) \\ Q_1(\omega,\omega')\dfrac{\mu_{N,\beta,h}(\omega')}{\mu_{N,\beta,h}(\omega)} & \text{sinon} \end{cases} \\ Q(\omega,\omega) = 1 - \displaystyle\sum_{\omega'\neq\omega} Q(\omega,\omega') \end{array}$$

La mesure de probabilité $\mu_{N,\beta,h}$ est réversible pour Q (donc invariante)

La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par la matrice Q est irréductible, récurrente positive.

Il s'agit maintenant de construire la matrice Q définie comme précédemment afin de lui associer une chaîne de Markov. Le théorème ergodique s'appliquera donc (on a fait en sorte que) et les simulations nous permettront d'approcher certaines espérances.

La construction de $(X_n)_{n\geq 0}$ s'effectue par récurrence. On détaille le cas $n = 0$ ici :

$$X_0 \xrightarrow[①]{\text{proposition}} Y_0 \xrightarrow[②]{\text{acceptation / rejet}} X_1 = (X_0 \quad \text{ou} \quad Y_0)$$

Etape ⓪ : Initialiser la matrice initiale de spins (configuration) notée X_0 (de préférence aléatoire)

Etape ① : Choisir la configuration Y_0 avec la loi $Q_1(X_0,\cdot)$. Pour cela, il suffit de tirer de manière uniforme une case de la matrice et d'inverser son spin. (en effet, $Q_1(\omega,\cdot)$ est la loi uniforme sur les configurations qui différent de ω d'au plus un spin.)

Etape ② : Accepter ou non la proposition avec la loi Q. En effet, la probabilité d'acceptation est

$$P(X_0,Y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu_{N,\beta,h}(Y_0) > \mu_{N,\beta,h}(X_0) \\ \dfrac{\mu_{N,\beta,h}(Y_0)}{\mu_{N,\beta,h}(X_0)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On tire donc un nombre aléatoire dans $[0,1]$. S'il est inférieur à $P(X_0,Y_0)$, on renvoit $X_1 = Y_0$. Sinon, on renvoit $X_1 = X_0$.

On généralise ce procédé à un terme n quelconque de la chaîne, selon le schéma ci-dessous :

$$X_n \xrightarrow{\text{proposition}} Y_n \xrightarrow{\text{acceptation / rejet}} X_{n+1} = (X_n \quad \text{ou} \quad Y_n)$$

N.B. : Le rapport de la probabilité d'acceptation n'est pas compliqué à calculer :

$$\frac{\mu_{N,\beta,h}(Y_n)}{\mu_{N,\beta,h}(X_n)} = \exp\left(\mathcal{H}_{N,\beta,h}(Y_n) - \mathcal{H}_{N,\beta,h}(X_n)\right)$$

7 Chaînes de Markov (TP 3)

7.1 Le truc classique (Guide de survie)

On utilise la fonction grand pour simuler les N premières réalisations d'une chaîne de Markov de position initiale x_0 dans un espace fini de matrice de transition P.

Code Scilab

```
grand(N,'markov',P,x0)
```

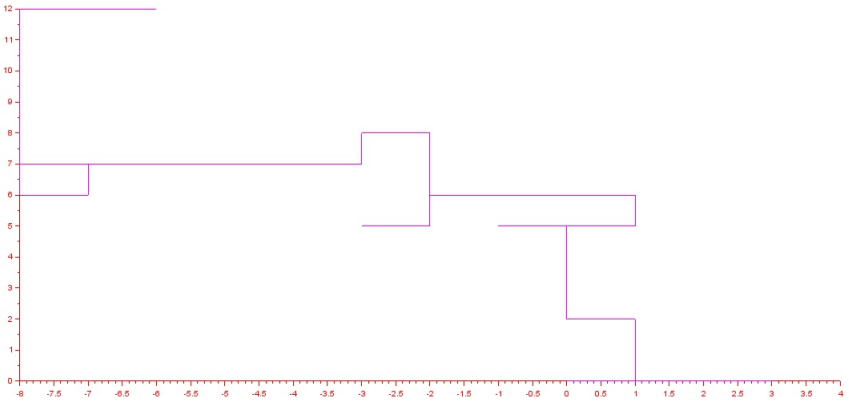
Attention, cela ne ressort pas la position initiale !

7.2 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ (Guide de survie)

L'idée est la même que pour le dé. Il faut que partant d'un point, on a 4 directions possibles. On a en entrée un vecteur de proba (attention de taille 3 car la dernière est complétée automatiquement)

Code Scilab

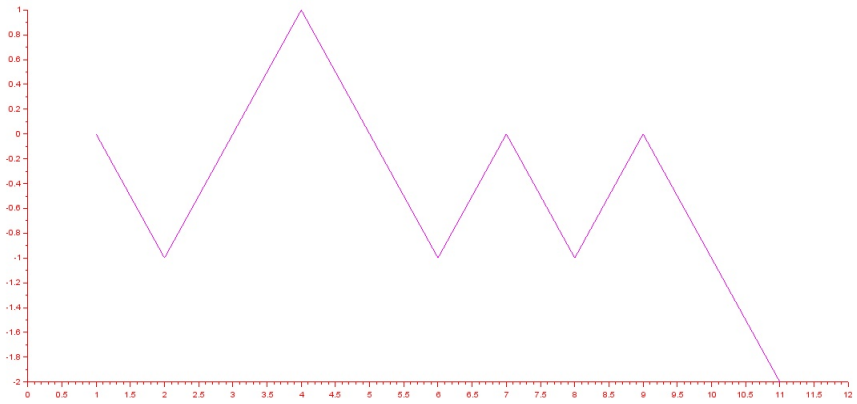
```
    function [X]=trajectoire(nb_pas,P);//P proba sur 1,2,3,4
        X=[0; 0 ];
        nord=[0; 1];
        sud=[0; -1];
        est=[1; 0];
        ouest=[-1; 0];
        M=[nord sud est ouest];
        for k=1:nb_pas
            sens=grand(1,'mul',1,P); //je tire une direction avec la multinomiale
            X(:,k+1)=X(:,k)+M*sens;      //je rajoute ma direction à X
        end
        plot2d(X(1,:),X(2,:),2); //je plote la deuxième coordonnée de X en fct de
la première
    endfunction
```



On adapte très facilement ce programme sur $\mathbb{Z}$. Je l'écris quand même ici (on va ploter la position de X en fonction du temps par contre).

Code Scilab

```
function [X]=trajectoireZ(nb_pas,P);//P proba sur 1,2
    X=0;
    gauche=-1;
    droite=+1;
    M=[gauche droite];
    P(2)=[];
    for k=1:nb_pas
        sens=grand(1,'mul',1,P);
        X(k+1)=X(k)+M*sens;
    end
    plot2d([1:(nb_pas+1)],X,2);
endfunction
```



8 Processus de Poisson (TP 4)

8.1 Tracé d'un processus de Poisson jusqu'à un nombre de sauts

On fait les temps intersauts, les temps de sauts et on plot

Code Scilab

```
function poisson(nbsaut)
    E=grand(1,nbsaut,'exp',1) // temps intersauts
    T=cumsum(E) //temps de sauts
    plot2d2(T,[1:nbsaut]) // je plote de 1 à 20 en fonction de mes temps de sauts
endfunction
```

8.2 Tracé d'un processus de Poisson jusqu'à un temps t

Même principe mais on bidouille un peu pour que ça coupe au bon moment

Code Scilab

```
function poisson2(t)
    clf()
    T=0
    while T($)<t
        T=[T T($)+grand(1,1,'exp',1)]
    end
    T($)=20
    N=[0:length(T)-2, length(T)-2]
    plot2d2(T,N)
endfunction
```

ou encore en se servant de la loi même du processus

Code Scilab

```
function generateur(t,lambda)
    k=grand(1,1,'poi',lambda*t)
    T=-gsort(-t*rand(1,k))
    plot2d2(T,[1:length(T)])
endfunction
```

8.3 Temps de saut

Si on veut simuler les temps de saut d'un processus de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ sur $[0,t]$

Code Scilab

```
function [T]=generateur(t,lambda)
    T=0
    while T($)<t
        E=grand(1,1,'exp',1/lambda) // on sait que le temps entre chaque saut suit
 une loi exponentielle
        T=[T T($)+E] // T va être le vecteur donnant le temps de chaque saut,
ainsi la taille de T est le nombre de sauts
    end
endfunction
```

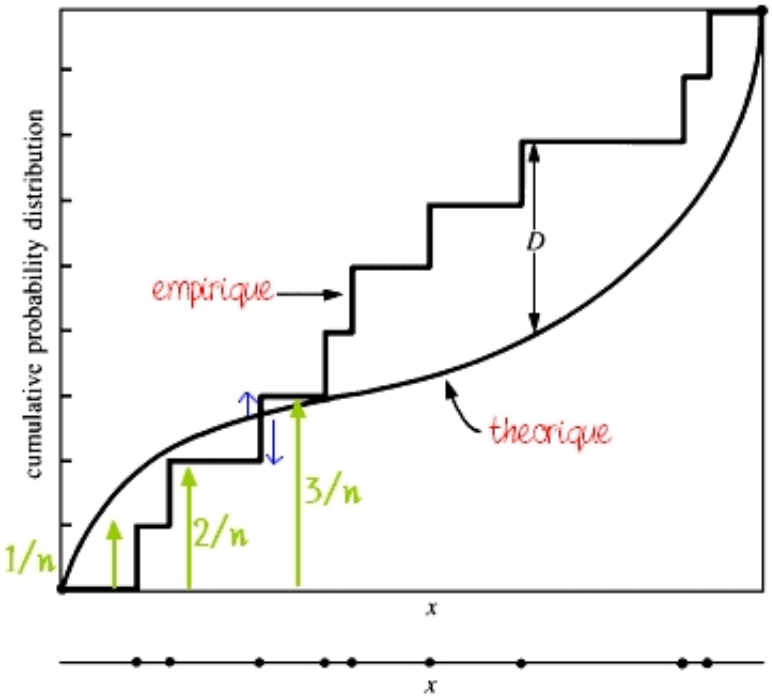
9 Quantiles empiriques (TP 5)

10 Tests

10.1 Test de Kolmogorov-Smirnov (TP 5)

Attention ! Ce test ne marche que pour tester des lois à densité !

Principe : à chaque point x pour lequel on aura eu un saut on va comparer le valeur de la fonction empirique avec la théorique. Mais on connait les valeurs en les sauts : elles augmentent de $1/n$ à chaque fois (cf vert). Attention, en chaque point, on doit prendre le max entre les valeurs au dessus et en dessous pour prendre l'écart maximal (flêche bleu).



Premier programme : vérifier si la statistique suit une loi KS. Regardons si des observations suivent bien une loi exponentielle de paramètre λ. On a bien convergence vers une loi finie qui est KS dans le cas $\mu = \lambda$ et environ divergence sinon (ie des valeurs anormalement grandes).

Code Scilab

```
function kolmo(n,N,mu,lambda)
    D=zeros(1,N)
    for i=1:N
        X=grand(1,n,'exp',1/mu) // on crée n observations
        X=gsort(X,'g','i') // on les met dans l'ordre
        for j=1:n
            Y(j)=1-exp(-lambda*X(j)) // on crée la fonction de répartition théorique F(X) si elles sont bien de paramètre lambda1
        end
        D(i)=sqrt(n)*max(max(abs([1/n:1/n:1]-Y')),max(abs([0:1/n:(1-1/n)]-Y'))) // statistique du test de KS
    end
    clf()
    histplot(50,D)
endfunction
```

Deuxième programme : rejeter ou non l'hypothèse d'adéquation. X est le vecteur des observations (il suffit d'en avoir plus de 35 pour ce quantile à 95 %) et F est la fonction de répartition de la loi théorique contre laquelle on veut tester les observations.

Code Scilab

```
function testKS(X,F)
    X=gsort(X,'g','i')
    n=length(X)
    for j=1:n
        Y(j)=F(X(j))
    end
    D=sqrt(n)*max(max(abs([1/n:1/n:1]-Y')),max(abs([0:1/n:(1-1/n)]-Y')))
    if (D<=1.36) then disp('Ho n est pas rejetée')
        else disp('Ho est rejetée')
    end
endfunction
```

10.2 Test du χ_2 (TP 6)

10.2.1 Adéquation

On a juste à calculer la grosse somme et à comparer avec le quantile.

Code Scilab

```
function [D,pval]=testchi2adeq(Q,P,n,erreur) //Q proba empirique. P proba thé
orique. n taille de l'échantillon.
    Y=(n.*P-n.*Q).^2
    Y=Y./(n.*Q)
    D=sum(Y)
    [p,pval]=cdfchi('PQ',D,length(Q)-1)
    if (D<cdfchi('X',length(Q)-1,1-erreur,erreur)) then disp('Ho n est pas rejetée
')
        else disp('Ho est rejetée')
    end
endfunction
```

11 Régression linéaire