Mémoire pour le Master 2
Leçon 204 - Connexité. Exemples et applications.

Laura GAY

Année 2014 - 2015

Table des matières

Introduction

Heuristiquement, la connexité est une notion de topologie qui formalise le concept d'“ objet d'un seul tenant”. Un objet est dit connexe s'il est fait d'un seul “morceau”, dans le cas contraire, chacun des morceaux est une composante connexe de l'objet étudié. La connexité permet donc le passage du local au global.

Par exemple, un archipel n'est pas connexe.

Cadre : Soit (E,d) un espace métrique. A une partie de E. On munit A de la distance d sur A. $D := \{0,1\}$ est muni de δ la distance discrète sur D ($\delta(0,0) = \delta(1,1) = 0$ et $\delta(0,1) = \delta(1,0) = 1$).

I Généralités

I.1 Définitions et premières propriétés

Proposition 1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.

(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Preuve :
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons $E = F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Les ouverts $O_1 = E \setminus F_1$ et $O_2 = E \setminus F_2$ vérifient $O_1 \cup O_2 = E$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, donc d'après (i), $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, et comme $F_1 \cup F_2$ est une partition de E, $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit A une partie ouverte et fermée de E. Alors l'ensemble $B = E \setminus A$ est ouvert et fermé, et comme $E = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, on en déduit d'après (ii) que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, c'est à dire $A = \emptyset$ ou $A = E$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints de E. L'ensemble O_1 est fermé car $O_1 = E \setminus O_2$, donc O_1 ouvert et fermé de E, et vérifie $O_1 = \emptyset$ ou $O_1 = E$, d'où (i). ■

Définition 2

Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit *connexe*.

Dans toute la suite, E sera un espace connexe.

Exemple :
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un singleton sont des ensembles connexes.
$\mathbb{Z}$ n'est pas connexe : $\{x_0\}$ est ouvert et fermé.

Proposition 3

Un espace métrique (E,d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : (E,d) \to \mathbb{Z}$ est constante.

Preuve :
$\Rightarrow$: On utilise la caractérisation (iii). Soit $x_0 \in E$, $n_0 = f(x_0)$, $A = f^{-1}(\{n_0\})$. A est ouvert-fermé car $\{n_0\}$ est ouvert-fermé dans $\mathbb{Z}$ et f est continue. De plus, $A \neq \emptyset$ car $x_0 \in A$. Donc $A = E$ et $f = n_0$.
$\Leftarrow$: On va montrer la caractérisation (i). Supposons par l'absurde que $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints non vides. Soit $f = \mathbb{1}_{O_1}$. f est continue car les O_j sont ouverts (donc l'image réciproque d'un ouvert et un ouvert), et f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Donc $f = 0$ ou $f = 1$ ie $O_1 = \emptyset$ ou $O_1 = E$ (donc $O_2 = \emptyset$). Absurde. ■

Remarque : On peut avoir le même résultat pour toute application continue $f : (E, d) \to D$.

Définition 4

La partie A est connexe si elle l'est pour la topologie induite.

Plus simplement, on a la proposition suivante :

Proposition 5

La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.

(i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors :
$$(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subset O_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1)$$
(ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors :
$$(A \cap F_1 = \emptyset \text{ et } A \subset F_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subset F_1)$$

Proposition 6 (Lemme de passage des douanes)

Toute partie connexe C de E qui rencontre l'intérieur de A et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A

Preuve :
Si $C \cap \partial A = \emptyset$, $C = (C \cap \text{int}A) \sqcup (C \cap \text{ext}A)$.
Or int$A$, ext$A$ sont des ouverts dans E, donc $C \cap \text{int}A$ et $C \cap \text{ext}A$ sont ouverts dans C. Absurde avec la connexité de C. ■

Contre-exemple :
L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si on se donne $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

I.2 Stabilité de la notion de connexité

Théorème 7

Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une application continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Preuve :
Soit B une partie ouverte et fermée de $f(E)$. Il existe un ouvert O et un fermé de F de E' tels que $B = O \cap f(E) = F \cap f(E)$.
On a alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(O) = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(B)$ est fermé et ouvert dans E, E étant connexe, $f^{-1}(B) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = E$, c'est à dire $B = \emptyset$ ou $B = f(E)$. ■

Application

Si E est connexe, g_1 et g_2 deux applications continues de E dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

1. $e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2} \Rightarrow g_1 - g_2$ est une constante entière.
2. $g_1^n = 1 \Rightarrow g_1$ est une constante racine n-ième de l'unité.

Preuve :

1. $g_1 - g_2$ est par hypothèse à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $g_1(x) - g_2(x) = c$ pour tout $x \in E$.
2. g_1 est à valeurs dans l'espace des racines n-ièmes de l'unité, donc constante : il existe ω racine n-ième de l'unité tel que $g_1(x) = \omega$ pour tout $x \in E$.

■

PROPOSITION 8

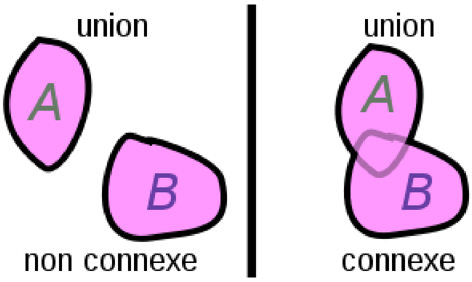
Soit A une partie connexe. Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Preuve :
Soit $f : B \to D$ une application continue. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante. Supposons par exemple $f_{|A} = 0$. Soit $x_0 \in B$. Il existe un voisinage V de x_0 dans B tel que

$$\forall x \in V, \qquad \delta(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{2}$$

ce qui montre que pour tout $x \in V$, $f(x) = f(x_0)$. Or $B \subset \bar{A}$, donc $V \cup A = \emptyset$. Si on choisit $x_1 \in V \cup A$, on a $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Ainsi, $f = 0$. Donc B connexe. ■

Dans le cas général, une réunion de connexes n'est pas connexe (par exemple, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes dans $\mathbb{R}$ mais $\{0, 1\}$ n'est pas connexe.



On a cependant le résultat qui suit :

PROPOSITION 9

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E telle que $\exists i_0 \in I, \forall i \in I\ C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$.
Alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Preuve :
Soit $f : \displaystyle\bigcup_{i\in I} C_i \to D$ une application continue. Pour tout i, C_i est connexe donc $f_{|C_i}$ est constante. En particulier, $f_{|C_{i_0}}$ est constante, par exemple $f_{|C_{i_0}} = 0$.
Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I} C_i$ et soit $i \in I$ tel que $x \in C_i$. Comme $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$, on peut trouver $x_0 \in C_i \cap C_{i_0}$. Comme $f_{|C_i}$ est constante, elle a la même valeur en x et x_0 donc $f(x) = 0$. Ainsi f est constante car x était quelconque, d'où $\displaystyle\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe. ■

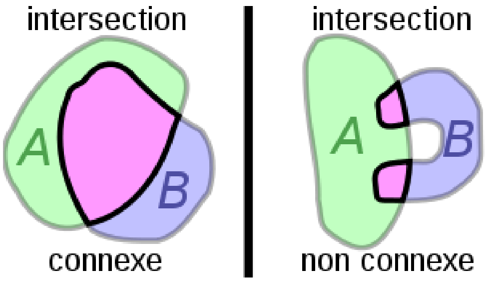
REMARQUE :
Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes telle que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Proposition 10

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes telle que pour tout $i \in I$, $i = 0$, $C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Preuve :
Soit $f : \bigcup_{i\in I} C_i \to D$ une application continue. Pour tout i, C_i est connexe donc $f_{|C_i}$ est constante. Comme $C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$ pour $i \neq 0$, donc $f_{|C_{i-1}} = f_{|C_i}$ (proposition précédente avec $C_i \cup C_{i-1}$). En procédant par récurrence sur i, on en déduit que $f_{|C_i} = f_{|C_0}$ pour tout i donc f est constante, d'où $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe. ■

Contre-exemple :
Une intersection de connexe n'est pas toujours connexe : $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un connexe de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ aussi mais $U \cup \mathbb{R} = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe.



Proposition 11

Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.

Preuve :
$\Leftarrow$: Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $f : E_i \to D$ une application continue. La projection p_i de E sur E_i étant continue, l'application $f \circ p_i : E \to D$ est continue. Comme E est connexe, $f \circ p_i$ est constante. Donc f est constante et E_i est connexe.
$\Rightarrow$: Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E$ et $f : E \to D$ une application continue.
L'application $f_1 : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & f(x, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$ est continue, donc constante car E_1 est connexe. En particulier, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$.
En itérant le procédé sur chacun des connexes $E_2, \ldots, E_n$, on obtient $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$. L'application f est constante donc E est connexe. ■

I.3 Exemple de connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 12

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

Preuve :
$\Rightarrow$: Un connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. En effet, si $C \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, il existe $(a, b) \in C^2$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Mais alors $C \subset]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, donc C n'est pas connexe.
$\Leftarrow$: Réciproquement, montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe.
Si I est un singleton c'est immédiat.
Si $I =]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, considérons une application continue $f : I \to D$.
Si f n'est pas constante, il existe $x, y \in I$ vérifiant $a < x < y < b$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Par exemple $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On considère alors l'ensemble :

$$\Gamma = \{z \in I \;/\; z \geqslant x \text{ et } \forall t \in [x, z], f(t) = 0\}$$

L'ensemble Γ est non vide car $x \in \Gamma$. De plus, Γ est majoré par y. Soit $c = \sup \Gamma$. Comme f est continue, $f(c) = 0$. De même, f étant continue en c :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in [c, c+\varepsilon], \quad \delta(f(t), f(c)) < \frac{1}{2}$$

d'où pour tout $t \in [c, c+\epsilon]$, $f(t) = 0$, ce qui montre que $c + \varepsilon \in \Gamma$. Absurde par définition de c.
Donc, f est constante et I est connexe. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ étant compris entre un intervalle ouvert et son adhérence, on en conclut d'après la Proposition 8 que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. ■

On en déduit le théorème suivant, fondamental en analyse réelle :

Théorème 13 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit E un espace connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ continue ; si f prend deux valeurs α et β, elle prend toute valeur γ intermédiaire entre α et β ($\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$).

Preuve :
Le théorème précédent assure la connexité de I, donc $f(I)$ est connexe d'après le Théorème 7 et donc c'est un intervalle. ■

Théorème 14 (Théorème de Brouwer en dimension 1)

Toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe.

Preuve :
Soit $g(x) = f(x) - x$. $[a, b]$ est connexe, g continue avec $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. 0 est donc une valeur intermédiaire entre $g(a)$ et $g(b)$ donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$ ie x_0 point fixe de f. ■

Application (Théorème de Sarkowski-1964)

Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue.
On dit que $x \in I$ est de période $n \geqslant 2$ si $f^n(x) = x$ et si $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, ..., n-1\}$. On dit que x est de période 1 si c'est un point fixe de f.
On suppose qu'il existe un point de période 3. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un point de période n.

Preuve :
On commence par deux lemmes :

Lemme 15

Si K est un segment inclus dans $f(I)$ alors il existe un segment L inclus dans I tel que $K = f(L)$

Preuve :

On pose $K = [\alpha, \beta]$. Comme $K \subset f(I)$, il existe $(a, b) \in I^2$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$ alors $K = \{\alpha\}$ et le singleton $L = \{a\}$ convient.
On suppose donc $\alpha \neq \beta$ et $a \neq b$. On suppose $a < b$.
Idée : prendre dans $[a, b]$ un antécédent u de α et un antécédent v de β tels qu'entre u et v il n'y ait plus d'autres antécédents de α ni de β.
On considère pour cela $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) = \beta\}$. C'est un fermé non vide ($b \in A$) et minoré par a. Soit $v = \min\{x \in A\}$. On a $f(v) = \beta$ et pour tout $t \in [a, v]$, $f(t) < \beta$ d'après le TVI (car $f(a) = \alpha < \beta$).
Soit alors $B = \{x \in [a, v] \ / \ f(x) = \alpha\}$. Par continuité de f, c'est un fermé non vide majoré par v. Soit $u = \max\{x \in B\}$. On a alors $u < v$ et $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. On prend $L = [u, v]$.
Le cas $a > b$ se traite avec $u = \max\{x \in [b, a] \ / \ f(x) = \beta\}$ et $v = \min\{x \in [u, a] \ / \ f(x) = \alpha\}$ ■

Lemme 16

S'il existe n segments $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ inclus dans I tels que : $\begin{cases} I_0 \subset f(I_{n-1}) \\ I_{k+1} \subset f(I_k) \qquad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$
Alors $f^n = f \circ \dots \circ f$ a un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Preuve :

Cas $n = 1$ On a par hypothèse un segment $I_0 = [a, b]$ tel que $I_0 \subset f(I_0)$.
En particulier, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. La fonction $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(\beta) \geqslant 0$ et $g(\alpha) \leqslant 0$ et elle est continue donc s'annule d'après le TVI. Donc f a un point fixe dans I_0.

Cas $n = 2$ On a $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$, donc $I_0 \subset f^2(I_0)$.
Par le cas $n = 1$, f^2 a donc un point fixe x_0 dans I_0, mais a priori on ne sait pas si $f(x_0) \in I_1$. C'est là que le Lemme 15 intervient : il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J_1)$. On a donc $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. Par le même argument que précédemment, il existe $x_0 \in J_1$ tel que $f^2(x_0) = x_0$, et cette fois on peut conclure : $x_0 \in J_1$ donc $f(x_0) \in I_1$.

Cas général $n > 3$ On procède de la même manière en itérant.
Comme on a $I_1 \subset f(I_0)$, on choisit $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. On choisit $J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$. De proche en proche, on construit ainsi une suite finie de segments

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \dots \subset J_1 \subset I_0$$

tels que $f^k(J_k) = I_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
On a alors $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$. D'après le Lemme 15, il existe donc $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 = f^n(J_n)$.
Comme $J_n \subset f^n(J_n)$, il existe donc un point fixe x_0 de f^n dans J_n. Par construction des intervalles J_k, $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

■

Revenons à la preuve du théorème.

Pour simplifier si I_1 et I_2 sont tels que $I_1 \subset f(I_2)$, on notera $I_1 \to I_2$. Le Lemme 16 nous dit que si on a un cycle $I_0 \to I_{n-1} \to \dots \to I_1 \to I_0$ alors f^n admet un point fixe x_0 dans I_0 vérifiant $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Par hypothèse f admet un point 3-périodique a. On pose $b = f(a)$ et $c = f(b) = f^2(a)$. Alors b et c sont aussi 3-périodiques et quitte à remplacer a par b et c on prend $a = \min(a, b, c)$.

• On suppose $\underline{a < b < c}$
On pose $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$, $I_1 \subset f(I_0)$ ie $I_1 \to I_0$. De même, on a $I_0 \subset f(I_1) = [a, c]$, donc $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_1$. La dernière inclusion montre que f admet un point fixe dans I_1.
De même, le cycle $I_0 \to I_1 \to I_0$ montre que f^2 a un point fixe x_0 dans I_0 tel que $f(x_0) \in I_1$. Comme $x_0 \neq b$, $x_0 \notin I_1$ et donc $x_0 \neq f(x_0)$. Ainsi, x_0 est 2-périodique.
Soit maintenant $n \geqslant 4$. On écrit le cycle $I_0 \to \underbrace{I_1 \to \dots \to I_1}_{n-1 \text{ fois}} \to I_0$. D'après le Lemme 16, f^n admet un point fixe $x \in I_0$ tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k < n$. x ne peut être égal à b (sinon $\exists k < n$ tel que $f^k(x) = a \notin I_1$) et donc x est n-périodique.

• Si $\underline{a < c < b}$
On pose $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. On a cette fois $I_1 \to I_0$, $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. On reprend le même raisonnement que précédemment en échangeant I_0 et I_1.
On a donc montré dans tous les cas que f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$. ■

I.4 Composantes connexes

Définition 17

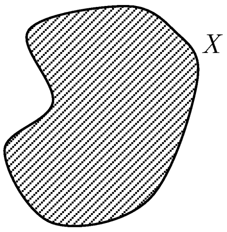
Soit la relation binaire $\sim$ dans E par :

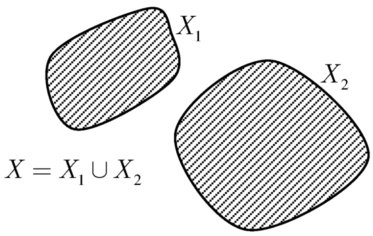
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists C \text{ connexe de } E \;/\; x \in C, y \in C$$

Cette relation est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes de connexes de X. On note $C(x)$ la classe d'équivalence de x

Preuve :
Cette relation est évidemment réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive car si $x, y \in C$ et $y, z \in C'$, où C et C' sont connexes. Alors $C \cup C' = J$ est connexe (intersection non vide :$y \in C \cap C'$). De plus, $x, z \in J$. ■

Remarques :
– Les composantes connexes forment une partition de E.
– E est connexe $\Leftrightarrow$ il a une seule composante connexe.





Proposition 18

1. $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x, c'est aussi le plus grand connexe contenant x.
2. $C(x)$ est fermé dans E

Preuve :

1. Soit S la réunion de tous les connexes contenant x. D'après la Proposition 10, c'est un connexe. Donc $y \in S$ entraîne $y \sim x$ donc $S \subset C(x)$.
   Réciproquement, $y \in C(x)$ entraîne l'existence d'un connexe C contenant x et y, donc contenu dans S. Donc $C(x) \subset S$.
2. $\overline{C(x)}$ est connexe et contient x. D'après le 1., $\overline{C(x)} \subset C(x)$, d'où le résultat.

■

Proposition 19

Si $E = \bigsqcup_I \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de E.

Preuve :
Soit C la composante connexe d'un point x. Si C rencontre ω_i, $C \cup \omega_i$ est un connexe contenant x donc $C \cup \omega_i = C$ d'après la proposition précédente.
Autrement dit, C est la réunion des ω_i qu'elle rencontre. Mais C ne peut rencontrer plusieurs ω_i, sinon elle se partagerait en ouverts non vides disjoints (absurde par la définition même de connexe). Or C en rencontre

forcément un car les ω_i recouvrent E. Soit ω_j celui-ci, alors $C = \omega_j$.
On a donc aussi la réciproque $y \in \omega_i$ entraîne $\omega_i = C(y)$. ■

Exemple : Si $E =]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$, $x < y$, il y a 2 composantes connexes mais E n'est pas connexe.

II Connexité par arcs et par lignes brisées

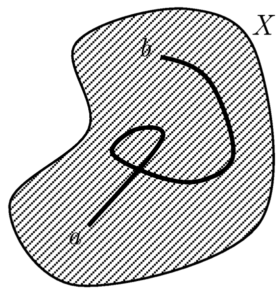
II.1 Définition et propriétés de la connexité par arcs

Définition 20

Deux points a et b sont dits équivalents s'il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. γ s'appelle un chemin joignant a à b dans E. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc et $\gamma(1)$ son extrémité.

Définition 21

On dit que (E,d) est connexe par arcs si tout $a, b \in E$ sont équivalents ie s'il existe un chemin inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.



Exemple : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes par arcs.

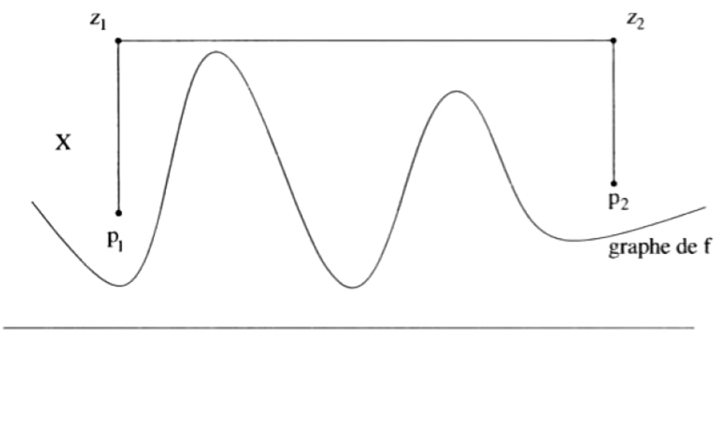
Théorème 22

Un espace connexe par arcs est connexe. La réciproque est vraie si E est un ouvert d'un evn.

Preuve :
Soient E un espace connexe par arcs et $f : E \to D$ une application continue.
Soit $(a,b) \in E^2$. Il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to D$ est continue donc constante car $[0,1]$ est connexe. Donc $f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1)$ ie $f(a) = f(b)$ donc f est constante donc E connexe.
La réciproque sera vue au Théorème 32. ∎

Exemple : L'épigraphe d'une fonction continue réelle est connexe par arcs.

Preuve :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On note $X = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > f(x)\}$ son épigraphe.
Soit $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2) \in X$. Appelons M la borne supérieure de f sur le compact $[x_1, x_2]$ et joignons p_1 à p_2 dans X en joignant p_1 à $z_1 = (x_1, M+1)$ par le segment vertical $[p_1, z_1]$, puis z_1 à $z_2 = (x_2, M+1)$ par le segment horizontal $[z_1, z_2]$, enfin z_2 à p_2 par le segment vertical $[z_2, p_2]$. Le résultat s'ensuit.



∎

Contre-exemple : Si on considère Γ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Gamma = \left[\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (\{x\}\times\mathbb{R}^+)\right] \bigcup \left[\bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} (\{x\}\times]-\infty,0[)\right]$$

est un connexe de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas connexe par arcs.

II.2 Application au groupe matriciel

Proposition 23

Les ouverts connexes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs.

Proposition 24

$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Proposition 25

$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve :
Soient A et B deux matrices inversibles. Soit C le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble (fini) des zéros du polynôme $P(z) = \det(zA + (1-z)B)$ est connexe. L'image de C par l'application $z \mapsto zA + (1-z)B$ est un connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant A et B. ■

Proposition 26

L'ensemble des projecteurs de rang p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Théorème 27 (Surjectivité de l'exponentielle)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. En particulier, la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve :

- Préliminaire : Montrons déjà que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A]\cap GL_n(\mathbb{C})$. "$\subset$" est triviale. Soit $X \in \mathbb{C}[A]\cap GL_n(\mathbb{C})$. Alors X^{-1} est un polynôme en X (avec Cayley-Hamilton par exemple) [1]. Donc a fortiori, X^{-1} est un polynôme en A donc $X \in \mathbb{C}[A]^\times$.

- $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (*servira pour le TIL*). En effet, $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \underbrace{\det{}^{-1}(\mathbb{R}^*)}_{\text{ouvert}}$.

- $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe. On montre pour cela qu'il est connexe par arcs.
  Soit $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$, alors $P(z) := \det(zM + (1-z)N)$ est un polynôme non nul (car $P(0) = \det(N) = 1$) donc l'ensemble Z de ses racines est fini. $\mathbb{C}\setminus Z$ est connexe par arcs et contient 0 et 1 donc il existe un chemin γ reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C}\setminus Z$. Le chemin $\gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ relie alors N à M dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

1. Ou plus simplement : Soit μ_M le polynôme minimal d'une matrice M inversible. Supposons que son coefficient constant est nul. Alors μ_M peut s'écrire $\mu_M = XQ$. Comme M est inversible, $\mu_M(M) = MQ(M) = 0$ donc $Q(M) = 0$. Absurdité du polynôme minimal. Donc nécessairement $\mu_M = a_0 + XQ$ avec a_0 non nul. On a donc $M^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}Q(M)$

– Montrons que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[A],+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}[A]^{\times},\cdot) \\ X & \longmapsto & \exp(X) \end{array}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.
$\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie [2] donc est fermé.
Or, si $X \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}X^k$ est une limite de polynômes en A donc d'éléments de $\mathbb{C}[A]$, donc $\exp(X) \in \mathbb{C}[A]$.
Par ailleurs, $\exp(X) \in GL_n(\mathbb{C})$ car d'inverse $\exp(-X)$, donc l'application est bien définie.
C'est un morphisme de groupes car les éléments de $\mathbb{C}[A]$ commutent, et $\mathbb{C}[A]$ stable par produit.
Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^{\times}$. <u>But :</u> montrer que c'est un ouvert fermé du connexe $\mathbb{C}[A]^{\times}$.

– φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car $\exp(X)$ l'est.

– La différentielle en 0 de φ est donc l'identité qui est bijective. De plus, $\mathbb{C}[A]^{\times}$ est ouvert (vu précédemment) donc, d'après le théorème d'inversion locale, φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}[M]$ et un voisinage V de I_n dans $\mathbb{C}[M]^{\times}$. En particulier, $V = \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

– Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^{\times}$. Pour cela, on va montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est voisinage de chacun de ses points.
Si $B \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(B+U) = \exp(B)V$.
Comme $\exp(B)$ est inversible, la multiplication par cette matrice est un difféomorphisme donc est continue. Ainsi, $\exp(B)V$ est un ouvert et donc un voisinage de $\exp(B)$. Or $\exp(B)V \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ (vu précédemment). Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de chacun de ses points. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

– Montrons maintenant que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]$. On a (par double inclusion assez facile) :

$$\mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M\exp(\mathbb{C}[A])$$

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[A])$ est donc fermé, puisque les ensembles $M\exp(\mathbb{C}[A])$ sont ouverts (car toujours $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et la multiplication par un inversible est un difféomorphisme...).

– Bilan : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé et ouvert dans le connexe $\mathbb{C}[A]^{\times}$. Comme $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^{\times}$. On a donc, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Donc la surjectivité de l'exponentielle.

■

Proposition 28

On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Preuve :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exp(M) = A$, alors $\left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2 = A$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ appartenant à l'ensemble de droite. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$. D'après le théorème, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $\exp(P(C)) = C$. Or, comme C est réelle, $C = \overline{C} = \exp(\overline{P}(C))$, donc $A = C \times \overline{C} = \exp(P(C) + \overline{P}(C))$ car $P(C)$ et $\overline{P}(C)$ commutent. Or $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$, donc la matrice A est bien l'exponentielle d'une matrice réelle. ■

Contre-exemple :
$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exp. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = A$, alors si λ est valeur propre de B, $\exp\lambda$ est valeur propre de A donc $\lambda = \mathrm{i}\pi + 2\mathrm{i}k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda \neq \bar{\lambda}$, or

2. La dimension de $\mathbb{C}[A] \simeq \mathbb{C}[X]/(\mu_A(X))$ est exactement le degré du polynôme minimal $\mu_A(X)$ de A.

B est réelle donc $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de B, donc B est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable, ce qui est absurde.
On pouvait aussi donner une matrice de déterminant négatif, car $\det \exp(B) = \exp(\mathrm{tr}(B)) > 0$ pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.3 Connexité par lignes brisées (dans un $\mathbb{R}$-evn)

Dans ce paragraphe, E sera un $\mathbb{R}$espace vectoriel normé.

Définition 29

On appelle ligne brisée de E joignant deux points a et b de E tout sous-ensemble de la forme $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} [x_i, x_{i+1}]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$, $x_n = b$ et pour tout i, $x_i \in E$.

Définition 30

A est dite connexe par lignes brisées si, pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b.

Proposition 31

A convexe $\Rightarrow$ A connexe par lignes brisées $\Rightarrow$ A connexe par arcs.

Preuve :
Cela résulte de la définition et du fait qu'une ligne brisée est un arc. ■

Exemple : E est connexe par lignes brisées car pour tout $a, b \in E$, $[a,b] \subset E$.

Théorème 32

Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées.

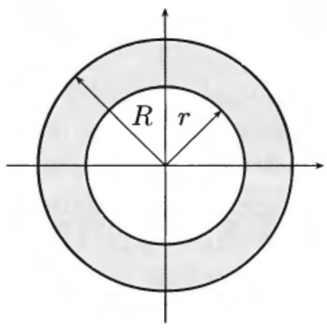
Preuve :
La condition suffisante découle du Théorème 22, une partie connexe par lignes brisées étant connexe par arcs.
Montrons la condition nécessaire. Soit Ω un ouvert connexe non vide de E.
Soit $x_0 \in \Omega$ et T_{x_0} l'ensemble des points de Ω que l'on peut joindre à x_0 par une ligne brisée contenue dans Ω.

- On a $T_{x_0} \neq \emptyset$ car $x_0 \in T_{x_0}$.
- L'ensemble T_{x_0} est ouvert.
  En effet, si $x \in T_{x_0}$, on a $x \in \Omega$ donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset \Omega$.
  Ainsi, pour tout $y \in B(x,\rho)$, $[x,y] \subset \Omega$ et comme $x \in T_{x_0}$, on en déduit $y \in T_{x_0}$.
- L'ensemble T_{x_0} est fermé dans Ω.
  En effet, si $x \in \overline{T_{x_0}} \cap \Omega$, il existe une boule $B(x,\rho) \subset \Omega$ telle que $B(x,\rho) \cap T_{x_0} \neq \emptyset$. Si on choisit $y \in T_{x_0} \cap B(x,\rho)$, on a alors $[y,x] \subset \Omega$, donc $x \in T_{x_0}$.

Finalement $T_{x_0} \neq \emptyset$ est ouvert et fermé dans le connexe Ω donc $T_{x_0} = \Omega$ d'où le résultat. ■

Exemple :

En dimension 2, une couronne ouverte de type $\{z \in \mathbb{C} \ / \ r < |z| < R\}$ pour $0 < r < R$ est connexe par arcs mais non convexe.



III Applications de la connexité

III.1 Analyse réelle

Théorème 33 (Théorème de Darboux)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 34

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $f : U \to F$ différentiable sur un ouvert U de E.

1. Si U est un ouvert convexe de E et si $Df(x) \leqslant k$ pour tout $x \in U$ (où k est une constante positive), alors l'application f est k-lipschitzienne sur U, c'est à dire $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E$
2. Si U est un ouvert connexe de E et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$ alors f est constante sur U.

Proposition 35

Soient E et F deux ensembles. Soit h un homéomorphisme, h échange les composantes connexes de E et F c'est à dire : pour tout $x \in E$, $h(C(x)) = C(h(x))$

Preuve :
Soit $y = h(x)$. $h(C(x))$ est un connexe contenant y d'où $h(C(x)) \subset C(y)$.
On a de même $h^{-1}(C(y)) \subset C(x)$ ce qui entraîne l'inclusion inverse. ∎

Contre-exemple : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

III.2 Analyse complexe

Définition 36

Un domaine est un ouvert non vide connexe du plan complexe.

Théorème 37

Soit γ un chemin fermé ($\gamma(0) = \gamma(1)$) continument différentiable par morceaux, Ω le complémentaire de l'arc γ relativement au plan complexe, et définissons $\forall z \in \Omega$, $\mathrm{Ind}\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\gamma\frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$ La fonction γ est une fonction à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω, nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

Théorème 38

Soit Ω un ouvert connexe, $p \in \Omega$, f continue sur Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. On a pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\displaystyle\int_\gamma f(x)\mathrm{d}z = 0$.

Théorème 39 (Formule de Cauchy pour un ensemble convexe)

Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω, et soit $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, on a : $f(z).\mathrm{Ind}\gamma(z) = \displaystyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$

Conséquence : Pour tout ouvert Ω du plan, toute $f \in H(\Omega)$ est analytique.

Théorème 40 (Théorème des zéros isolés)

Soit Ω un domaine et soit $f \in H(\Omega)$. Posons, $Z(f) = \{a \in \Omega \ / \ f(a) = 0\}$ Alors ou bien $Z(f) = \Omega$ (ie $f = 0$ ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. De plus, $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Remarque : Le théorème est en défaut si nous oublions l'hypothèse de connexité de Ω . Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints, il suffit de poser $f = 0$ sur Ω_1 et $f = 1$ sur Ω_2.

Corollaire 41

Si f et g sont des fonctions holomorphes sur un domaine Ω tel que $\{z \in \Omega \ / \ f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation alors $f = g$.

Théorème 42 (Théorème de l'image ouverte)

Si $f \in H(\Omega)$ lorsque Ω est un domaine, alors ou bien $f(\Omega)$ est un domaine, ou bien c'est un point.

III.3 Théorie des groupes

Proposition 43

Si G/H et H sont connexes G est connexe.

Preuve :
Soit $f : G \to \{0, 1\}$ une application continue. Puisque H est connexe, chaque $g.H$ l'est aussi. ■

Proposition 44

$GL_n^+(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est positif) est connexe.

Preuve :

Etape 1 Si S est symétrique définie positive.
Montrons que S est joignable à I dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.
En effet, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}SP = D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, les λ_i étant strictement positifs.
Posons alors, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\lambda_i(t) = 1 - t + t\lambda_i$, $D(t) = \operatorname{diag}(\lambda_i(t))$ et $S(t) = PD(t)P^{-1}$.
On a de façon évidente $\lambda_i(t) > 0$ pour tout i. Donc $S(t) \in GL_n^+(\mathbb{R})$.
D'autre part, $S(0) = I$ et $S(1) = S$ donc $t \mapsto S(t)$ est un chemin joignant I à S dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Etape 2 Si U est orthogonale donc $\det U = +1$.
De la même manière, montrons que U est joignable à I dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.
Par réduction des endomorphismes orthogonaux, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où pour tout i $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.
Par le même principe on pose

$$U(t) := P \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & R(\theta_1, t) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_r, t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

où pour tout i $R(\theta_i, t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_i) & -\sin(t\theta_i) \\ \sin(t\theta_i) & \cos(t\theta_i) \end{pmatrix}$.
Et alors $U(t)GL_n^+(\mathbb{R})$, $U(0) = I$, $U(1) = U$, et $t \mapsto U(t)$ est un chemin joignant I à U dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Etape 3 Dans le cas général $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$:
On utilise la décomposition polaire de A : $\exists (U, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A = US$. Posons $A(t) = U(t)S(t)$ (définis comme précédemment) alors $t \mapsto A(t)$ fonctionne...

■

Corollaire 45

$GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes.

Preuve :
On a par définition $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \sqcup GL_n^-(\mathbb{R})$. L'application det étant continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont ouverts. Donc d'après la Proposition 19, il suffit de montrer qu'ils sont connexes (ils sont clairement non vides). On a montré la connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$ à la proposition précédente.

Mais $GL_n^-(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $GL_n^+(\mathbb{R})$ via l'application $A \mapsto DA$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ■

Proposition 46

$SL_n(\mathbb{K})$ est connexe.

Preuve :
Soit $A \in SL_n(\mathbb{K})$. On sait que A est produit de transvections $t_i(\lambda_i)$. On peut construire un chemin de A à I par $t \mapsto \prod t_i(t\lambda_i)$. ■

Théorème 47

Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe, le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes.

Preuve :
Pour la première partie, cela a été fait dans l'Etape 2 de la démonstration de la Proposition 44.
Comme $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions, on prend S une réflexion. Soit T le complémentaire de $SO_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$. Alors l'application $M \mapsto SM$ envoie $SO_n(\mathbb{R})$ sur T. Cela nous donne un homéomorphisme entre T et $SO_n(\mathbb{R})$. ■

Application

L'ensemble $SO_3 := SO_3(\mathbb{R}) = \{A \in O_3(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$ est simple.

Preuve :
Soit G un sous-groupe distingué de SO_3 et G_0 la composante connexe par arcs dans G de Id.

Lemme 48

Si de plus G est connexe par arcs et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ alors $G = SO_3$.

Preuve :
On va montrer que G contient un retournement (une rotation d'angle π). On en déduira alors que $G = SO_3$.
• Soit $g \in SO_3$. On note θ_g l'angle de cette rotation [3]. Nous savons qu'il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_g & -\sin\theta_g & 0 \\ \sin\theta_g & \cos\theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\mathrm{tr}(g) = 1 + 2\cos\theta_g$, donc l'application

$$\phi : \begin{array}{ll} SO_3 & \longrightarrow [-1, 1] \\ g & \longmapsto \cos\theta_g = \dfrac{\mathrm{tr}(g) - 1}{2} \end{array}$$

est bien définie et continue. Il suffit de montrer que ϕ prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in G$ d'angle π. Cependant, avec l'argument de connexité il va être plus facile de trouver un élément de G d'angle θ tel que $\cos\theta = 0$. Autrement dit, nous allons prouver que G contient une rotation r d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$. Alors r^2 sera un élément de G d'angle π.

• Cherchons pour commencer un élément $s \in G$ tel que $\phi(s) = \cos\theta_s \leqslant 0$.
Par hypothèse, G possède un élément g différent de Id. Quitte à changer la direction de l'axe de la rotation, on peut supposer que $\theta_g \in]0, \pi]$.
Si $\cos\theta_g \leqslant 0$ ie $\theta_g \in [\pi/2, \pi]$ alors $s = g$ convient.
Sinon, $\theta_g \in]0, \dfrac{\pi}{2}$ et on pose $N = E\left(\dfrac{\pi}{2\theta}\right)$. On a

$$N\theta \leqslant \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \leqslant \pi,$$

donc g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi[$ donc $s = g^{N+1}$ convient.

• Puisque G est connexe par arcs, il existe un chemin γ de G reliant Id à s. L'application

$$\varphi = \phi \circ \gamma : t \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\gamma(t)) - 1)$$

est continue puisque tr et γ le sont.
De plus, $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \cos\theta_s \leqslant 0$ par construction de s.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\dfrac{\pi}{2}$ et $R = r^2 \in G$ un angle de π et donc R est donc un retournement et appartient à G.

• Montrons qu'alors $G = SO_3$. Pour tout $g \in SO_3$, l'élément gRg^{-1} est dans G car G est distingué par hypothèse. De plus, $\mathrm{tr}(gRg^{-1}) = \mathrm{tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. SoitΔ l'axe de R. Soit u un vecteur appartenant à Δ, alors $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$ donc gRg^{-1} est le retournement d'axe $g(\Delta)$. Or étant donné une droite D de $\mathbb{R}^3$, il est toujours possible [4] de trouver une rotation g telle que $D = g(\Delta)$ en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle bien choisi [5] Ainsi, G contient tous les retournements. Or SO_3 est engendré par les retournements, ce qui conclut. ■

3. θ_g est défini au signe près car si l'on change l'orientation de l'axe de la rotation, l'angle est changé en son opposé
4. C'est en fait l'action transitive de SO_3 sur les droites de $\mathbb{R}^3$
5. N'oublions pas ici que les droites sont vectorielles donc passent toutes par 0.

Revenons à la simplicité de SO_3.

Étape 1 : Montrons que G_0 est un sous-groupe de SO_3. [6]

Par définition G_0 contient l'identité. Soient g et h deux éléments de G_0. Comme G_0 est connexe également, il existe γ et γ' des chemins de G_0 reliant Id à g et h respectivement. Considérons l'application

$$\gamma'' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \end{array}$$

Déjà, l'application est bien définie car pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \in G$ (G sous-groupe de SO_3).
De plus, l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une application continue sur SO_3 car si l'on identifie un élément g de SO_3 à sa matrice dans la base canonique, les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g.
Enfin, $\gamma''(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi, γ'' est bien un chemin de G reliant Id à gh^{-1} donc $gh^{-1} \in G_0$ donc $G_0 < G$.

Etape 2 : Montrons que $G_0 \lhd SO_3$ [7]

Soit $g \in G_0$, γ un chemin de G reliant Id à g et soit $h \in SO_3$. Considérons l'application

$$\gamma' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & h\gamma(t)h^{-1} \end{array}$$

Déjà, l'application est bien définie car comme $G \lhd SO_3$, pour tout $t \in [0,1]$, $h\underbrace{\gamma(t)}_{\in G}h^{-1} \in G$.

L'application γ est continue de même que la multiplication à droite ou à gauche par un élément de SO_3, donc γ' est continue.
Enfin, on a $\gamma'(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma'(1) = hgh^{-1}$. L'application γ' est bien un chemin de G reliant Id et hgh^{-1} donc $hgh^{-1} \in G_0$ et ainsi $G_0 \lhd SO_3$.

Étape 3 : Montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$ ou $G = SO_3$.

• Si $G_0 \neq \{\mathrm{Id}\}$, on peut appliquer le LEMME 16 car par définition et par l'étape 2, G_0 est un sous-groupe distingué et connexe par arcs. Donc, $G_0 = SO_3$, donc a fortiori $G = SO_3$.
• Si $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ alors montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$, ce qui terminera la preuve.
• Remarquons que dans ces conditions, toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons. En effet, si g' est dans la composante connexe par arcs de g relié par le chemin γ, alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$. Ainsi, $g^{-1}g' \in G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ donc $g' = g$ et donc toutes les composantes connexes par arc de G sont des singletons.
• Raisonnons par l'absurde et supposons que G contienne un élément $g \neq \mathrm{Id}$. Soit h une rotation quelconque, différente de Id et d'angle θ_h.
Pour tout $t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe et d'angle $t\theta_h$.
L'application $t \mapsto h_t$ est continue car matriciellement elle se traduit dans une certaine base orthonormale par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta_h) & -\sin(t\theta_h) & 0 \\ \sin(t\theta_h) & \cos(t\theta_h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'application $t \in [0,1] \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G (car G est distingué), d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Ainsi, hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arc de g qui est un singleton et donc $hgh^{-1} = g$. Or, si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$ donc $h(\Delta) = \Delta$ C'est impossible : une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace ! Ainsi $G = \{\mathrm{Id}\}$ ce qui montre la simplicité de G.

■

6. Autre version : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G_0 \times G_0 & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$ est continue, et $G_0 \times G_0$ étant connexe, on en déduit que l'image de φ est un connexe de G. De plus elle contient l'identité, donc est incluse dans G_0, ce qui montre que G_0 est un sous-groupe de G.

7. Autre version : Soit $h \in SO_3$, alors l'application

$$\mathrm{Int}_h : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ g \longmapsto hgh^{-1} \end{array}$$

est bien définie. Le même argument que plus haut montre que Int_h envoie G_0 dans G_0, et ce pour tout $h \in SO_3$, ce qui signifie que G_0 est un sous-groupe distingué de SO_3.

Références

[1] *Les maths en tête : Analyse* de Xavier Gourdon

[2] *Topologie : Cours et exercices corrigés* de Hervé Queffélec

[3] *Les Contre-Exemples en Mathématiques* de Bertrand Hauchecorne

[4] *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation* de François Rouvière

[5] *Un Max de Maths : Problèmes pour agrégatifs et mathématiciens, en herbe ou confirmés* de Maxime Zavidovique

[6] *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* de Rached Mneimné et Frédéric Testard

[7] *Géométrie* de Michèle Audin

[8] *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices* de Walter Rudin