1 Propriétés de Markov et trucs divers

Remarque 1

Si E est fini, il existe au moins un état récurrent.

2 Gros théorèmes de convergence

Définition 1

Une mesure de probabilité μ sur E est invariante (ou stationnaire) si $\mu P = P$.

Remarque 2

Une mesure invariante ne charge pas les états transcients et récurrents nuls.

Définition 2

Une mesure de probabilité μ sur E est réversible si $\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(u,x)$.

Remarque 3

réversible $\Rightarrow$ invariante

Proposition 1

On a les propriétés suivantes sur un espace d'états fini

1. Il existe au moins une probabilité invariante.
2. Si la matrice P est symétrique, la mesure uniforme est réversible (donc invariante).

2.1 Cas d'une chaîne irréductible et éventuellement récurrente

Théorème 1

Si P est irréductible, elle a au plus une probabilité invariante.
De plus, cette probabilité invariante existe (et donc est unique) $\boxed{\text{ssi}}$ la chaîne est récurrente positive.

Remarque 4

On a donc immédiatement que, sur un espace d'états fini, comme une chaîne irréductible est récurrente positive, elle admet une unique probabilité invariante.

Corollaire 1

Soit X une chaîne irréductible récurrente de mesure invariante μ. Il y a deux cas possibles,
(i) $\mu(E) = +\infty$. Alors, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(\sigma_x) = +\infty$. La chaîne est dite récurrente nulle.
(ii) $\mu(E) < +\infty$. Alors, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(\sigma_x) < +\infty$. La chaîne est dite récurrente positive. Dans ce cas l'unique probabilité invariante est donnée par

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x(\sigma_x)}.$$

Théorème 2

Soit X une chaîne irréductible, récurrente nulle. Alors on a $P^n(x,y) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x,\ y \in E$.

Proposition 2 (*Théorème ergodique*)

Soit X une chaîne irréductible, récurrente positive, de probabilité invariante π. Alors, pour toute $f \in L^1(\pi)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} f(X_k) \to \pi.f, \quad \text{p.s.}$$

Corollaire 2

(i) Si X est une chaîne irréductible, récurrente positive, de probabilité invariante π, alors, pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \mathbb{1}_x(X_k) \to \pi(x) \text{ p.s.}$$

$\pi(x)$ est donc la fréquence de passage de la chaîne par x.
De plus,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(y,x) \to_{n\to\infty} \pi(x),$$

(ii) Si X est une chaîne irréductible récurrente nulle, alors, pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \mathbb{1}_x(X_k) \to 0, \text{ p.s.}$$

De plus,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(y,x) \to_{n\to\infty} 0.$$

Proposition 3

Si sur un espace d'états fini la chaîne est irréductible et récurrente, que μ est sa probabilité invariante. Alors, pour toute probabilité μ_0, on a

- la convergence au sens de Cesaro suivante :

$$\frac{\mu_0\left(I + P + \cdots + P^{n-1}\right)}{n} \to \mu$$

- $\mu_0 P^n \to P$ $\boxed{\text{ssi}}$ P apériodique

2.2 Cas d'une chaîne irréductible, apériodique récurrente positive

Théorème 3

Soit X une chaîne irréductible, apériodique, récurrente positive de probabilité invariante π. Alors $P^n(x,y) \to \pi(y)$ pour tous $x,\ y \in E$.

Proposition 4

Si une matrice stochastique Q a tous ses coefficients positifs strictement alors $Q^n(x,y) \to \pi(y)$ pour tous $x,\ y \in E$.