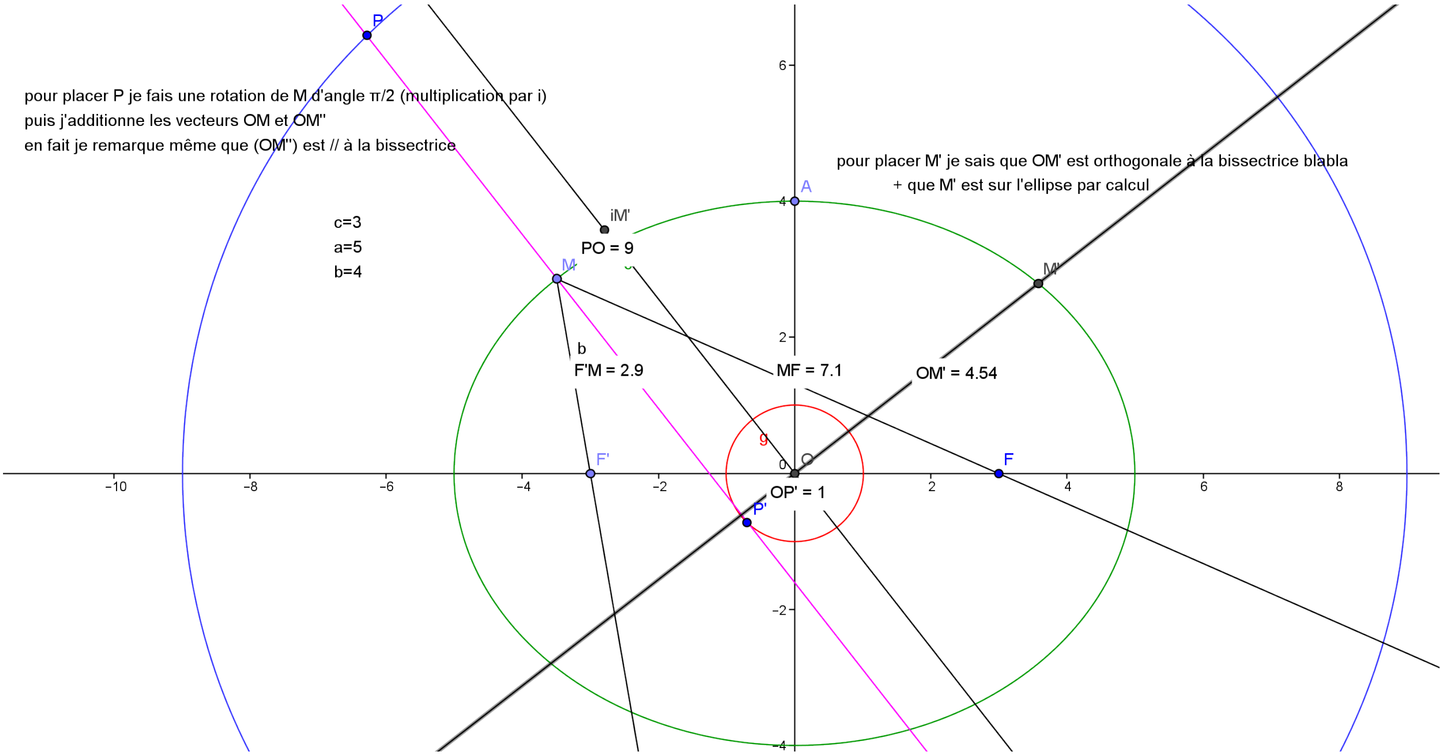
Ellipse, Cercles de Chasles, Diamètres conjugués

<u>Référence :</u> Trignan : La géométrie des nombres complexes p.187 et Monier : Géométrie MPSI p.119 pour le Lemme



Contexte

Soient a,b et c positifs. On considère l'ellipse (E) de foyer $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ définie dans un repère orthonormal par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et on a $a^2=b^2+c^2$.
A tout point M d'affixe $z=x+iy$ de l'ellipse (E), on associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que

$$z^2+z'^2=c^2$$

On définit enfin[1] P d'affixe $u=z+iz'$ et P' d'affixe $u'=z-iz'$ (dépendent de M).

Lemme

Propriété classique des ellipses : $MF+MF'=2a$.

Preuve :

1. On peut noter d'ores et déjà que M, P et P' sont alignés. En effet, $\left(\widehat{\overrightarrow{P'M}, \overrightarrow{MP}}, \rightrightarrows\right) \arg\left(\frac{z-u'}{u-z}\right) = \arg(1) = 0$

Traduisons la propriété voulue en terme de nombres complexes : $|z+c|+|z-c|=2a$ autrement dit

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

ou encore

$$(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2=4a^2$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad &\Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\\
&\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \;\text{ et }\; x^2\leqslant a^2 \;\text{ et }\; y^2\leqslant b^2\\
&\Leftrightarrow -a^2(x^2+y^2+c^2)+a^4=-c^2x^2 \;\text{ et }\; x^2+y^2\leqslant a^2+b^2=2a^2-c^2\\
&\Leftrightarrow -4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4=-4c^2x^2 \;\text{ et }\; 2a^2-c^2-x^2-y^2\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+c^2\right)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4=\left(x^2+y^2+c^2\right)^2-4c^2x^2 \;\text{ et }\; 2a^2-c^2-x^2-y^2\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+c^2-2a^2\right)^2=\left(x^2+y^2+c^2+2cx\right)\left(x^2+y^2+c^2-2cx\right) \;\text{ et }\; 2a^2-c^2-x^2-y^2\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2-2a^2=-\sqrt{((x+c)^2+y^2)\,((x-c)^2+y^2)}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{2x^2+2c^2}_{(x-c)^2+(x+c)^2}+2y^2-4a^2=-2\sqrt{((x+c)^2+y^2)\,((x-c)^2+y^2)}
\end{aligned}$$

■

Proposition (Pour la construction)

1. On a $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|$.
2. La droite (OM') est orthogonale à la bissectrice $[MN)$ des demi-droites $[MF)$ et $[MF')$.

Preuve :

1. (question 1a) On a $z'^2=c^2-z^2=(c-z)(c+z)\quad(\star)$. En module, cela donne : $\left|z'^2\right|=|c-z|\,|c+z|$.
   Géométriquement $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF'}\right\|\left\|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF}\right\|$ d'où la relation souhaitée.
2. (question 1b) On veut vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ie $\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}}\right)-\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MN}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
   La bissectrice [2] $[MN)$ vérifie $\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MN}}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF}}\right)\right]\ [\pi]$.
   On passe $(\star)$ à l'argument : $2\arg(z')=\arg(c-z)+\arg(c+z)\ [2\pi]$. Ce qui donne en terme d'angle

$$\begin{aligned}
2\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}}\right)&=\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{F'M}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF}}\right)\ [2\pi]\\
&=\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF}}\right)+\pi\ [2\pi]
\end{aligned}$$

   Donc

$$\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{MF}}\right)\right]+\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

   D'où le résultat. ■

Proposition

1. On a $|uu'|=c^2$ et $|u|+|u'|=2a$.
2. L'ensemble des points P et l'ensemble des points P' quand M décrit l'ellipse (E) forment deux cercles appelés cercles de Chasles de l'ellipse.

2. Attention, toujours regarder si on parle modulo π ou 2π.

Preuve :

1. (questions 2 et 3) Le premier point est facile car $uu' = (z + \mathrm{i}z')(z - \mathrm{i}z') = z^2 + z'^2 = c^2$.
   Pour la deuxième égalité, on calcule : $|u|^2 = u\bar{u} = (z + \mathrm{i}z')(\bar{z} - \mathrm{i}\bar{z'}) = |z|^2 - \mathrm{i}z\bar{z'} + \mathrm{i}z'\bar{z} + |z'|^2$
   $|u'|^2 = u'\bar{u'} = (a - \mathrm{i}z')(\bar{z} + \mathrm{i}\bar{z'}) = |z|^2 + \mathrm{i}z\bar{z'} - \mathrm{i}z'\bar{z} + |z'|^2$
   Donc, à l'aide du premier point on obtient : $(|u| + |u'|)^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|z'|^2 + 2c^2$.
   De plus [3]

$$\begin{aligned}(|z+c| + |z-c|)^2 &= |z+c|^2 + 2\,|(z+c)(z-c)| + |z-c|^2 \\ &= (z+c)(\bar{z} + \underbrace{\bar{c}}_{=c}) + 2\,\left|z^2 - c^2\right| + (z-c)(\bar{z} - \underbrace{\bar{c}}_{=c}) \\ &= |z|^2 + c^2 + c(z+\bar{z}) + 2\,|z'|^2 + |z|^2 + c^2 - c(z+\bar{z}) \\ &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2 + c^2\right)\end{aligned}$$

   Donc finalement $(|u| + |u'|)^2 = (|z+c| + |z-c|)^2$. Et comme ce sont des nombres positifs, on conclut [4] avec le **Lemme**

$$|u| + |u'| = |z+c| + |z-c| = 2a$$

2. Calculons $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OP'}\right\|$.
   Avec la question précédente, on a

$$(|u| - |u'|)^2 = (|u| + |u'|)^2 - 4\,|u|\,|u'| = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$$

   Donc

$$\begin{cases} |u| + |u'| & = 2a \\ |u| - |u'| & = \pm 2b \end{cases}$$

   Quitte à échanger P et P', on peut supposer $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = |u| = a + b$ et $\left\|\overrightarrow{OP'}\right\| = |u'| = a - b$. Donc leur norme est constante (ne dépend pas de M) donc les cercles de Chasles de l'ellipse sont les deux cercles de centre O et de rayon respectifs $a + b$ et $a - b$. ■

Corollaire (Diamètres conjugués - bizarre ne ressemble pas à ce qu'il y a sur internet)

OM et OM' sont les diamètres conjugués de l'ellipse : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2 = a^2 + b^2$.

Preuve :
On identifie parties réelle et imaginaire dans $z^2 + z'^2 = c^2$:

$$\begin{cases} x^2 + x'^2 - y^2 - y'^2 & = c^2 \\ xy + x'y' = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Mais on a que $M \in (E)$ et on a montré que $M' \in (E)$ aussi. Donc $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$ et $y'^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x'^2$.
On remplace dans notre première équation :

$$(x^2 + x'^2)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = c^2 + 2b^2 = a^2 + b^2$$

3. La suite d'équations qui suit ici peut également s'écrire avec z' car $z^2 + z'^2 = c^2$ est symétrique en z et z'. Ainsi, on obtient que $\left(\left|z'+c\right| + \left|z'-c\right|\right)^2 = 2\left(|z|^2 + \left|z'\right|^2 + c^2\right) = (|z+c| + |z-c|)^2$. Puis comme ce sont des nombres positifs, on obtient avec le **Lemme** que $\left|z'+c\right| + \left|z'-c\right| = |z+c| + |z-c| = 2a$ ce qui traduit l'appartenance de M' à l'ellipse (utile pour placer M').

4. On a en fait montré géométriquement que $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP'}\right\|$.

Donc on obtient :

$$\begin{cases} x^2 + x'^2 = a^2 \\ y^2 + y'^2 = b^2 \end{cases}$$

Et le résultat en découle immédiatement

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|^2 = (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) = a^2 + b^2$$

■

Notes :

✓ **A l'oral**, pas envie de faire le **Lemme** qui est juste astucieux. Voir si le temps de faire les diamètres conjugués ? Peut-être montrer le truc de la bissectrice pour la construction. C'est joli et ça fait des arguments. 8'30 pour contexte + la proposition et 3'24 pour diamètres conjugués.
♣ Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français. On lui doit d'importants travaux en géométrie projective, où il montra toute la richesse de la notion de rapport anharmonique, ainsi qu'en analyse harmonique, avec la représentation de certains potentiels.