

Chapitre 1

Trinôme

1.1 Définition

Définition 1.1 - Trinôme

Soit P une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que P est un trinôme si ils existent a, b, c trois réels, avec a non nul, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemple 1.2.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des trinômes:

- i) La fonction $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$.
- ii) La fonction $x \mapsto x^2 - 3x$.
- iii) La fonction $x \mapsto x + 2$.
- iv) La fonction $x \mapsto x^3 + 3x + 1$.
- v) La fonction $x \mapsto (x - 1)^2$.

1.2 Forme canonique

Définition 1.3 - Forme canonique d'un trinôme

Soit P un trinôme. On dit que P est sous forme canonique si et seulement si ils existent des réels a, α, β avec a non nul tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Méthode 1.4 - Mise d'un trinôme sous forme canonique

Si on considère un trinôme P défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b, c réels et a non nul.

i) On factorise par a :

$$P(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + b'x + c' \right),$$

$$\text{avec } b' = \frac{b}{a} \text{ et } c' = \frac{c}{a}.$$

ii) On fait apparaître une identité remarquable sur les deux premiers termes du trinôme à l'intérieur de la parenthèse

$$P(x) = a \underbrace{(x^2 + b'x + c')}_{\text{Identité remarquable}}.$$

Pour cela, on utilise le fait que, si $x, r \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + 2rx = (x + r)^2 - r^2.$$

iii) On développe le terme constant (celui qui ne dépend pas de x). On obtient donc notre forme canonique.

Exemple 1.5.

i) Déterminer la forme canonique de $P(x) = x^2 + 3x - 5$.

ii) Déterminer la forme canonique de $P(x) = 2x^2 + 4x - 5$.

Propriété 1.6 - Forme canonique d'un trinôme - Cas général

Soit P un trinôme donné, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b, c réels et a non nul. Alors la forme canonique de P est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

1.3 Équation du second degré

Théorème 1.7 - Résolution d'une équation du second degré

Soit P un trinôme donné par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels et a non nul. On veut résoudre l'équation

$$P(x) = 0.$$

On note $\Delta := b^2 - 4ac$ (c'est le **discriminant** du polynôme).

i) Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ii) Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

iii) Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.

Remarque 1.8.

- i) Si $\Delta < 0$, alors on dit que le trinôme P admet deux racines réelles x_1 et x_2 .
- ii) Si $\Delta = 0$, alors on dit que le trinôme P admet une racine double x_0 .
- iii) Si $\Delta < 0$, alors on dit que le trinôme P n'admet pas de racine réelle.

Démonstration

■

Exemple 1.9.

Déterminer les racines (éventuelles) des trinômes suivants

i) $P(x) = -3x^2 + 2.$

ii) $P(x) = 2x^2 - 2x + 9.$

iii) $P(x) = x^2 - 4x + 4.$

1.4 Factorisation et signe d'un trinôme

1.4.1 Factorisation d'un trinôme

Propriété 1.10 - Factorisation d'un trinôme

Soit P un trinôme donné par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels et a non nul.
On note $\Delta := b^2 - 4ac$ discriminant du polynôme.

i) Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

et se factorise en

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

ii) Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine réelle

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

et se factorise en

$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$

iii) Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas.

Exemple 1.11.

Factoriser si possible des trinômes suivants

i) $P(x) = 3x^2 + 3x + 3.$

ii) $P(x) = x^2 - 6x + 5$.

iii) $P(x) = -2x^2 + 8x - 8$

1.4.2 Signe d'un trinôme

Propriété 1.12 - Factorisation d'un trinôme

Soit P un trinôme donné par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels et a non nul.
On note $\Delta := b^2 - 4ac$ discriminant du polynôme.

- i) Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles notées x_1 et x_2 . Quitte à les échanger, on peut supposer que $x_1 < x_2$.

Alors P est du signe de a sur $] -\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, s'annule en x_1 et x_2 et est du signe opposé de a sur $]x_1, x_2[$.

- ii) Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle double notée x_0 .

Alors P est du signe de a sur $] -\infty, x_0[\cup]x_0, +\infty[$ et s'annule en x_0 .

- iii) Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racine réelle.

Alors P est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.

Exemple 1.13.

Déterminer le tableau de signe des trinômes suivants

i) $P(x) = x^2 + 2$

ii) $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$

iii) $P(x) = -x^2 - 4x - 4$

1.5 Annexe: courbes représentatives

