

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Vocabulaire

Definition 2.1 - Vocabulaire de probabilités

- i) On appelle expérience aléatoire une expérience où seul le hasard intervient.
- ii) Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des issues (ou éventualités).
- iii) L'ensemble des issues s'appelle l'univers, on le note Ω .
- iv) Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
- v) On dit que cet événement est réalisé si l'une des issues qui le compose est réalisée.
- vi) Ω s'appelle l'événement certain $\emptyset$ s'appelle l'événement impossible
- vii) Un événement est dit élémentaire s'il contient une seule issue.

Remarque 2.2.

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'au cas des univers *finis*, c'est-à-dire dans le cas où Ω ne comporte qu'un nombre fini d'issues.

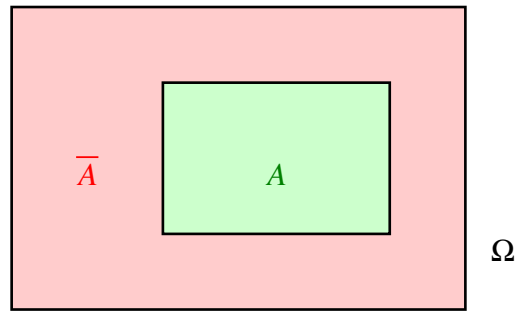
Exemple 2.3.

On lance un dé à six faces.

- i) Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- ii) L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- iii) $\{2\}$ et $\{1, 3\}$ sont des exemples d'événements.
- iv) $\{5\}$ est un événement élémentaire.

Definition 2.4 - Événement contraire

Soit Ω un univers fini, et A un événement de Ω . On appelle *événement contraire* de A et on note $\bar{A}$ l'événement constitué des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .



Remarque 2.5.

On a donc, pour tout évènement A de Ω , $\overline{\overline{A}} = A$.

Exemple 2.6.

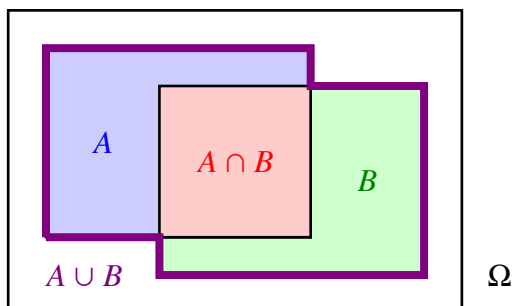
- i) On lance un dé à six faces. Si on considère l'évènement $A = \text{"Avoir un chiffre inférieur à 4"}$, on a donc $\overline{A} =$
- ii) On joue à pile ou face une fois. L'univers est $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$. Si on a l'évènement $A = \{\text{Pile}\}$, alors $\overline{A} =$

2.2 Union et intersection d'évènements

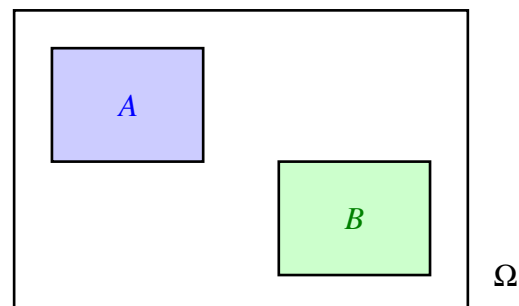
Definition 2.7 - Union, intersection, évènements disjoints

Soient Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω .

- i) On appelle **réunion** (ou union) de A et B et on note $A \cup B$ l'évènement de Ω constitué des éléments appartenant à A **ou** B .
- ii) On appelle **intersection** de A et B et on note $A \cap B$ l'évènement de Ω constitué des éléments appartenant à A **et** B .
- iii) On dit que A et B sont **disjoints** (ou incompatibles) s'ils sont **d'intersection nulle**, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.



Union et intersection



Évènements disjoints

Exemple 2.8.

i) On lance un dé à six faces. On note les évènements

- $A = \{\text{Faire un chiffre compris entre 1 et 4}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$
- $B = \{\text{Faire un chiffre supérieur à 2}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$

On a donc

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$

ii) On joue une fois à pile ou face. Que dire des évènements $\{\text{Pile}\}$ et $\{\text{Face}\}$?

2.3 Probabilité d'un évènement

2.3.1 Définition et premières propriétés

Definition 2.9 - Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω en associant à tout évènement de Ω un réel compris entre 0 et 1 tel que

- i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
- ii) Pour deux évènements A et B disjoints (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$), $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$

Remarque 2.10.

Si deux évènements A et B sont identiques, alors ils ont la même probabilité.

Propriété 2.11 - Propriété des probabilités

Soient Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω .

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

ii) Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, autrement dit si A est composé de n évènements élémentaires $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ distincts, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a_1\}) + \mathbb{P}(\{a_2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{a_n\}).$$

iii) Si A est un évènement de Ω , alors $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

iv) Si A et B sont deux évènements de Ω , alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Exemple 2.12.

i) Dans un lycée de 1200 élèves, 300 élèves ont 15 ans, 400 élèves ont 16 ans, 350 élèves ont 17 ans et 150 élèves ont 18 ans. On choisit un élève au hasard et on veut connaître la probabilité qu'un élève soit mineur.

ii) On lance un dé à six faces truqué, et on suppose que l'on a

- $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{12}$.

- $\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{6}$.

- $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{4}$.

On note l'évènement $A = \{\text{Avoir un chiffre pair}\}$. On veut calculer $\mathbb{P}(A)$.

2.3.2 Équiprobabilité

Definition 2.13 - Équiprobabilité

Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω . On dit qu'il y a équiprobabilité si chaque issue est réalisée avec la même probabilité.

Remarque 2.14.

Cela revient à dire que tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple 2.15.

Le lancer d'un dé équilibré ou encore le fait de tirer au hasard une carte dans un jeu de cartes sont des cas d'équiprobabilité.

Propriété 2.16 - Probabilité d'un évènement - Équiprobabilité

Soit Ω un univers fini avec équiprobabilité. Soit A un évènement de Ω . On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre total d'issues}}.$$

Exemple 2.17.

On lance un dé équilibré à six faces. On veut connaître la probabilité d'avoir un chiffre pair.

2.4 Probabilités conditionnelles

Dans cette section, on considère une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω , et A un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A)$ ne soit pas nul.

2.4.1 Définition et propriétés

Definition 2.18 - Probabilité conditionnelle

Soit B un évènement de Ω . On appelle **probabilité de B sachant A** le nombre réel, noté $\mathbb{P}_A(B)$ défini par

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Propriété 2.19 - Propriétés de la probabilité conditionnelle

$\mathbb{P}_A$ est une probabilité définie sur Ω . Ainsi, on a

- i) $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$.
- ii) Si B et C sont deux évènements de Ω disjoints, alors $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$.

Remarque 2.20.

On dit que $\mathbb{P}_A$ est la probabilité conditionnelle sachant A .

Propriété 2.21 -

Soit $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A . On a

- i) $\mathbb{P}_A(A) = 1$.
- ii) Pour tout évènement B dans Ω , $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
- iii) Si A et B sont disjoints, alors $\mathbb{P}_A(B) = 0$.
- iv) Si A et B sont deux évènements dans Ω tels que $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont non nulles, alors on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Exemple 2.22.

On s'intéresse au trafic routier entre Paris et Caen sur une journée. On considère uniquement les voitures, les camions et les motos, et l'on distingue les deux itinéraires possibles : l'autoroute et la route nationale.

	Voitures	Camions	Motos	Total
Autoroute	75 000	20 000	5 000	100 000
Route nationale	30 000	10 000	10 000	50 000
Total	105 000	30 000	15 000	150 000

On note les événements suivants:

- A: Le véhicule emprunte l'autoroute.
- B: Le véhicule emprunte la route nationale.
- C: Le véhicule est une voiture.
- D: Le véhicule est un camion.
- E: Le véhicule est une moto.

On sélectionne un véhicule au hasard.

- i) On veut calculer la probabilité qu'il ait emprunté l'autoroute sachant que c'est une voiture.

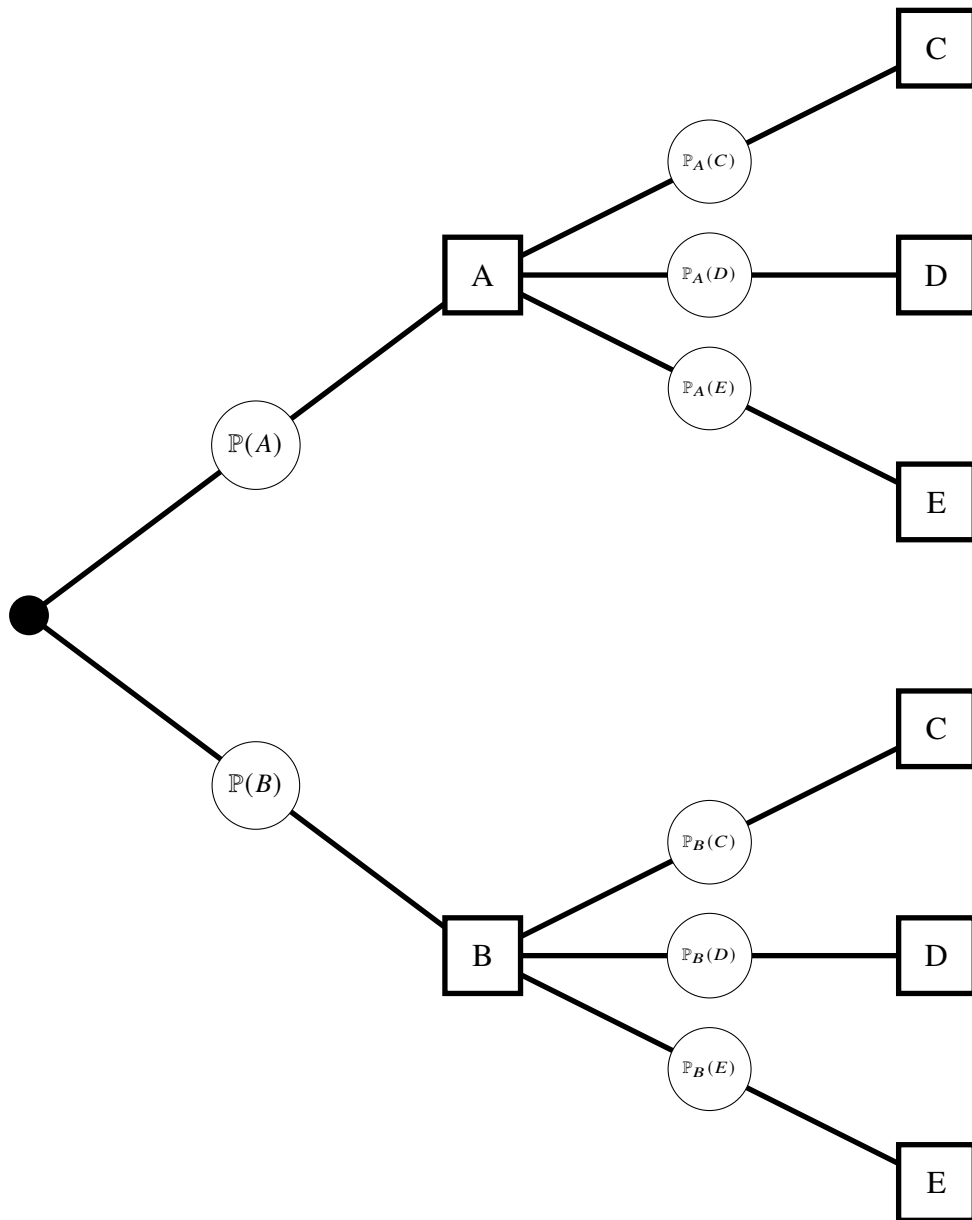
- ii) Cette fois-ci, on veut calculer la probabilité que ce véhicule ne soit pas un camion, sachant qu'il a emprunté la route nationale.

2.4.2 Arbres pondérés

Definition 2.23 - Arbre pondéré

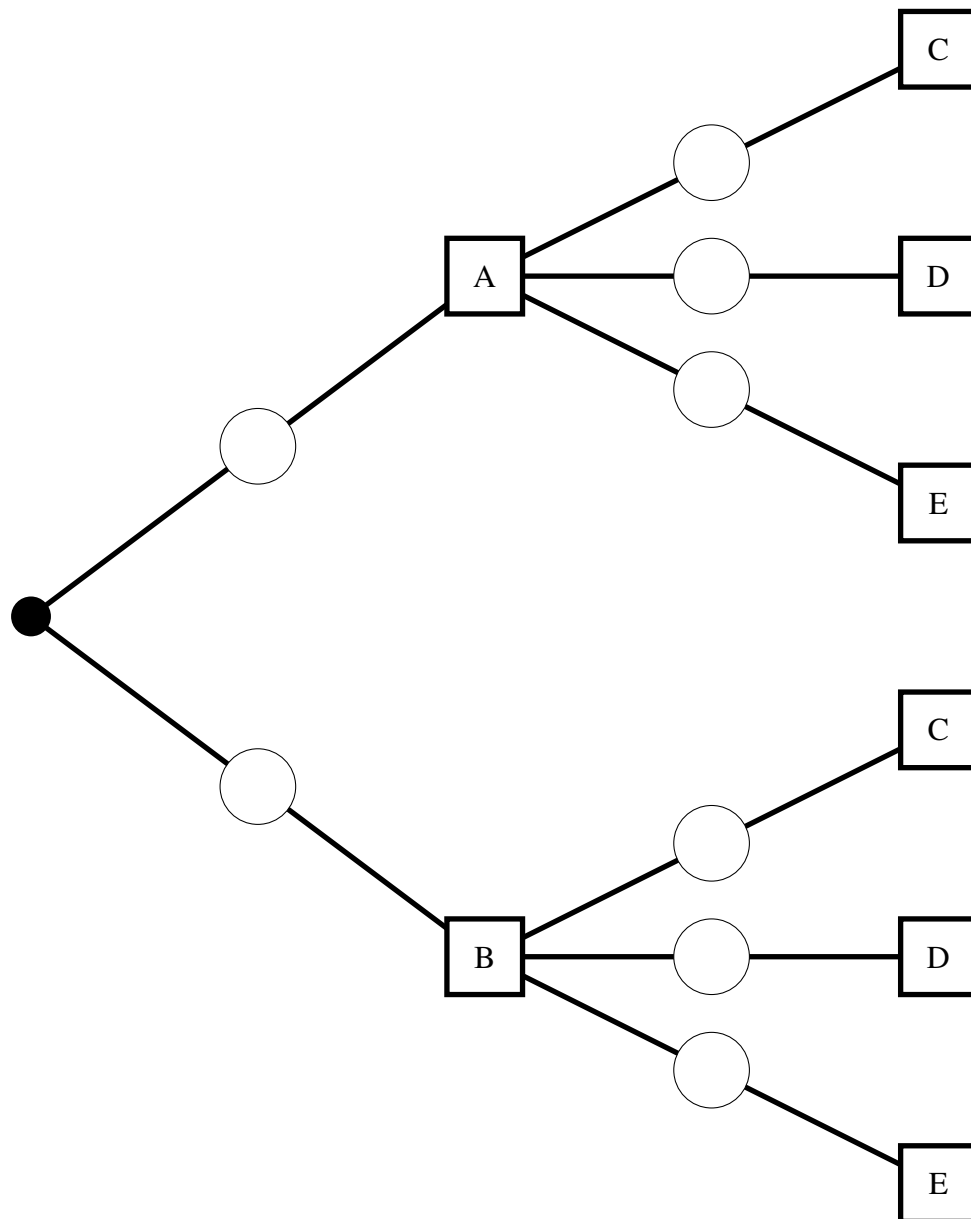
Un arbre pondéré (ou arbre de probabilités) est un graphe composé de nœuds et de branches, où chaque chemin représente une issue de l'univers Ω . Les règles suivantes s'y appliquent:

- i) Un nœud représente un évènement.
- ii) Une branche représente une probabilité.
- iii) La somme des probabilités sur les branches venant d'un même nœud est égale à 1.
- iv) Pour obtenir la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités sur les branches traversées.
- v) On place des probabilités au premier niveau, puis des probabilités conditionnelles à partir du second niveau.



Exemple 2.24.

Reprendre l'exemple précédent, et compléter l'arbre de probabilités



2.4.3 Partition de l'univers

Definition 2.25 - Partition de l'univers

Soit Ω un univers fini et $A_1, \dots, A_n$ des évènements de Ω . On dit que $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition de l'univers Ω (ou système complet d'évènements) si tout élément de Ω appartient à **un unique** A_i .

A_1	A_2	A_3	A_4
A_5	A_6	$\dots$	
			A_n

Ω

Remarque 2.26.

Ω est l'union de tous les évènements $A_1, \dots, A_n$ et les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints.

Exemple 2.27.

- i) Pour tout univers fini Ω , et pour tout évènement A de Ω , $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de l'univers Ω .
- ii) Si on lance au hasard un dé équilibré à six faces, considérons les évènements A_1, A_2 et A_3 où, pour tout entier i compris entre 1 et 3,

$$A_i = \{\text{Avoir un multiple de } i\},$$

alors l'ensemble des évènements $\{A_1, A_2, A_3\}$ ne forme pas une partition de l'univers, car $A_1 = \{1, \dots, 6\}$ et $A_2 = \{2, 4, 6\}$. Ces deux évènements ne sont pas disjoints.

- iii) Dans l'exemple précédent (trafic routier entre Paris et Caen), les évènements $\{A, B\}$ forment une partition de l'univers. En effet, chaque véhicule qui circule entre Paris et Caen se trouve soit sur l'autoroute, soit sur la route nationale, et il est impossible d'emprunter les deux routes à la fois.

De la même manière, les évènements $\{C, D, E\}$ forment une partition de l'univers. En effet, un véhicule est soit une voiture, un camion ou une moto (par définition dans l'énoncé), mais ne peut pas être de deux types à la fois.

Théorème 2.28 - Formule des probabilités totales

Soient Ω un univers fini, $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et $\{A_1, \dots, A_n\}$ une partition de l'univers Ω (avec n un entier naturel non nul). Soit B un évènement de Ω . On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \dots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

A_1	A_2	A_3	A_4	
$A_1 \cap B$	$A_2 \cap B$	$\dots$		
A_5	$A_5 \cap B$	$A_6 \cap B$	$\dots$	
			B	Ω

Exemple 2.29.

Reprenons l'exemple du trafic routier sur l'axe Paris-Caen. Calculer $\mathbb{P}(C)$ en utilisant la formule des probabilités totales. Comparer au nombre de voitures par rapport au nombre total de véhicules, est-ce bien cohérent ?

2.5 Indépendance

2.5.1 Définition et propriétés

Definition 2.30 - Événements indépendants

Soit Ω un univers fini, muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient A et B deux événements de Ω . On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Exemple 2.31.

On considère un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On note les événements:

- R = "Tirer une carte rouge".
- A = "Tirer un as".

i) Dire si les événements A et R sont bien indépendants.

ii) Maintenant, rajoutons deux jokers. On a donc au total 34 cartes. Dire si les événements A et R sont toujours indépendants.

Propriété 2.32 - Propriétés en cas d'indépendance

Soit Ω un univers fini, muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient deux évènements indépendants A et B de Ω . On a alors

i) $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$

ii) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

iii) $\bar{A}$ et B sont indépendants.

2.5.2 Succession d'épreuves indépendantes

Definition 2.33 - Épreuves indépendantes

On dit que deux épreuves sont indépendantes si elles n'ont pas d'influence l'une sur l'autre.

Méthode 2.34 - Calcul des probabilités - Deux épreuves indépendantes

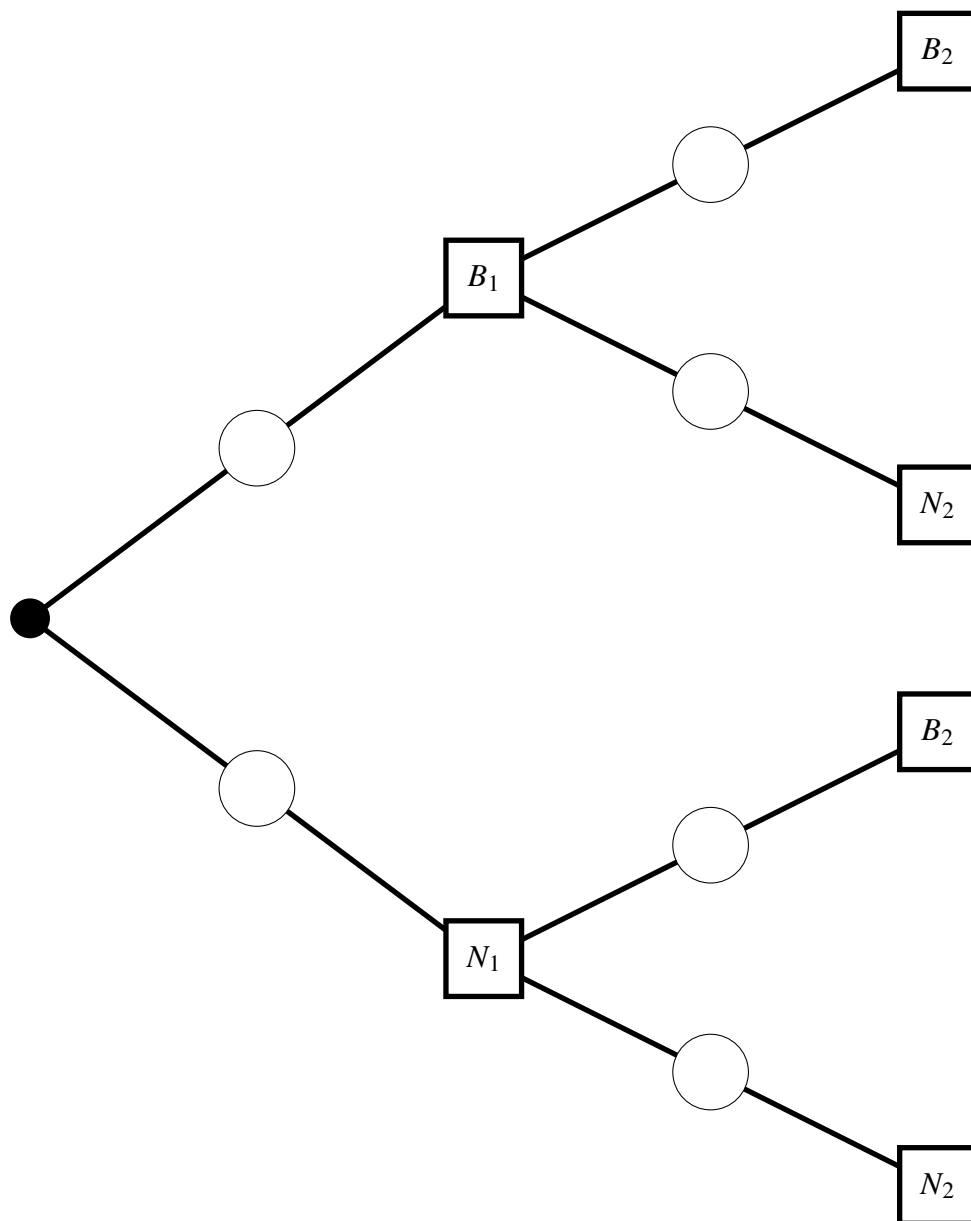
Dans le cas de deux épreuves indépendantes, on peut, au choix présenter les résultats sous forme de tableau ou d'arbre pondéré.

Exemple 2.35.

- i) On lance un dé et on note le résultat. Puis on lance une pièce de monnaie et on note le résultat (Pile ou Face). Ces deux épreuves sont indépendantes. On peut résumer les probabilités grâce au tableau suivant

	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}	Total
P							
F							
Total							1

- ii) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve 2 fois de suite. On peut modéliser par un arbre de probabilités



Pour connaître la probabilité d'un chemin, il suffit de multiplier les probabilités des branches entre elles. Par exemple, la probabilité de tirer une boule blanche puis une boule noire est $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) =$

2.5.3 Répétition d'une épreuve de Bernoulli

Definition 2.36 - Répétition d'une épreuve de Bernoulli

On dit que l'on répète de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli si cette épreuve comporte deux issues (généralement appelées succès et échec).

Remarque 2.37.

Ainsi, les expériences ont les mêmes issues, avec les mêmes probabilités.

Exemple 2.38.

- i) Lancer une pièce de monnaie équilibrée et compter le nombre de "Face".
- ii) Lancer un dé équilibré à six faces de manière répétée et nombre de fois où on obtient un 6.

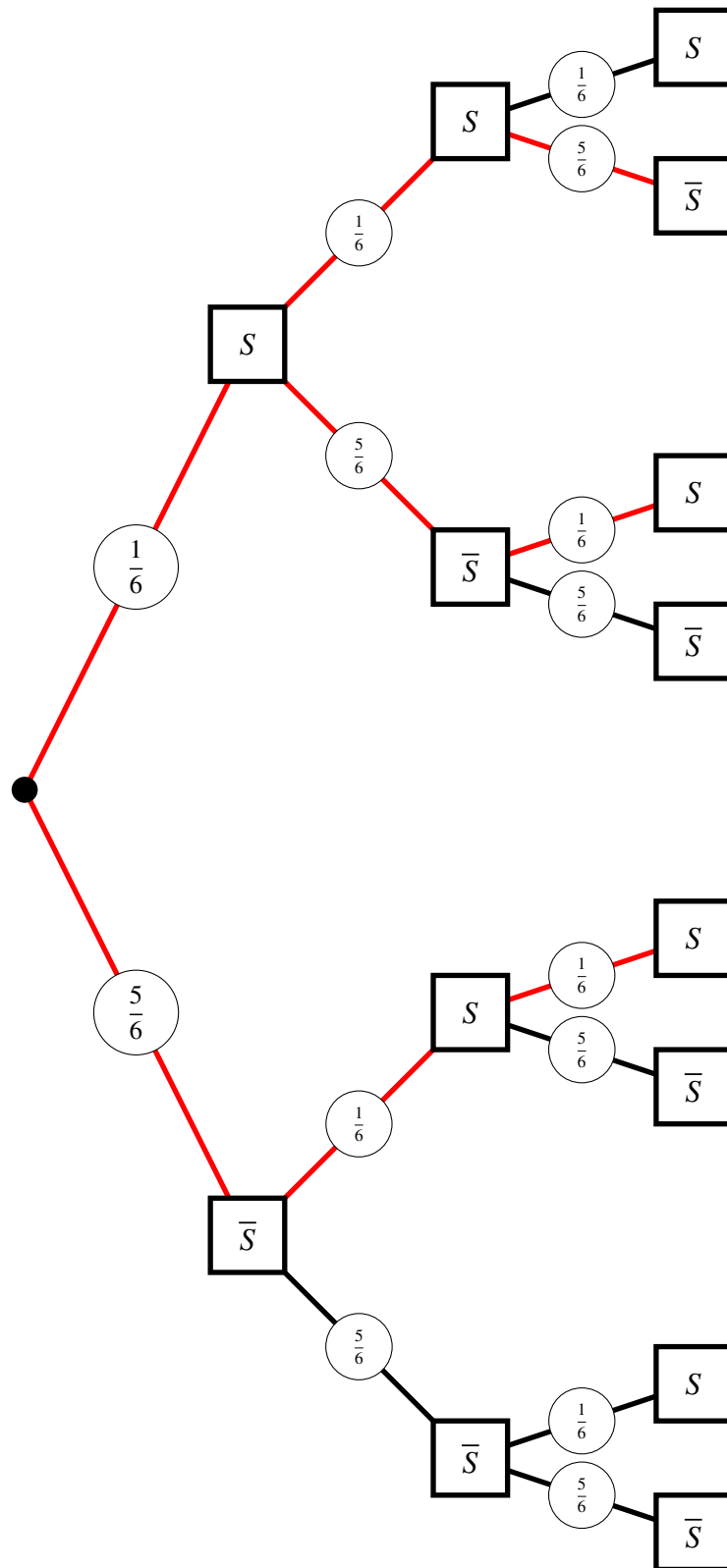
Méthode 2.39 - Arbre de probabilité

Pour calculer les probabilités, on peut s'aider d'un arbre de probabilité.

Exemple 2.40.

On reprend l'exemple du lancer de dé équilibré à six faces. On veut calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le chiffre 6 en réalisant trois lancers de dés. On note S l'évènement qui consiste à obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer de dé.

On peut s'aider d'un arbre pondéré.



On a coloré en rouge tous les chemins correspondant à *exactement* deux succès. On doit ainsi additionner les probabilités que de tels scénarios se produisent, donnant ainsi une probabilité d'avoir exactement deux fois le chiffre 6 de