

# Chapitre 3

## Suites

### 3.1 Définitions

#### Definition 3.1 -

Une **suite** est une liste ordonnée de nombres réels  $u_0, u_1, u_2 \dots$ . Concrètement, on fait correspondre à tout entier naturel  $n$  un nombre réel  $u_n$ . On la note  $(u_n)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est appelé le **terme de rang  $n$** .

#### Remarque 3.2.

C'est une fonction de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

#### Exemple 3.3.

- i) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = n^2 + 1$ . Les termes de rang 0, 1, 2, 4 sont donnés par:

---

ii) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{1}{2}n + 2$ . Les termes de rang 0, 1, 4, 8 sont donnés par:

iii) Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = -n + 5$ . Les termes de rang 0, 1, 10, 55 sont donnés par:

**Definition 3.4 -**

- i) On dit qu'une suite  $(u_n)$  est définie de manière **explicite** si elle est de la forme  $u_n = f(n)$  pour tout entier naturel  $n$  pour une certaine fonction  $f$ .
- ii) On dit qu'une suite  $(u_n)$  est définie par **réurrence** si elle est de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$  pour une certaine fonction  $f$ .

**Exemple 3.5.**

Dire si les suites suivantes sont explicites ou définies par récurrence:

- i)  $u_n = n^2 + 2n + 5$
- ii)  $u_0 = 0, u_{n+1} = u_n^2 + 1$
- iii)  $u_n = \frac{3}{2}n + 1$
- iv)  $u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n$
- v)  $u_n = (n + 1)^2$
- vi)  $u_n = 2^n$

### Méthode 3.6 -

#### Suite explicite vs définie par récurrence

| Paramètres                | Suite explicite                                                           | Suite définie par récurrence                                                                    |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Forme                     | $u_n = f(n)$                                                              | $u_{n+1} = f(u_n)$                                                                              |
| Donnée de départ          | Aucune condition initiale obligatoire                                     | Terme de rang 0 obligatoire                                                                     |
| Calcul d'un terme éloigné | Immédiat (par exemple, pour calculer $u_{100}$ , on remplace $n$ par 100) | A la suite (par exemple, pour calculer $u_{100}$ , il faut calculer $u_0, u_1, \dots, u_{99}$ ) |

#### Exemple 3.7.

Déterminer le terme de rang 3 des suites suivantes

i)  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 5u_n + 2$

---

ii)  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = -u_n + 3$

iii)  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2$

## 3.2 Représentation d'une suite

### 3.2.1 Suite explicite

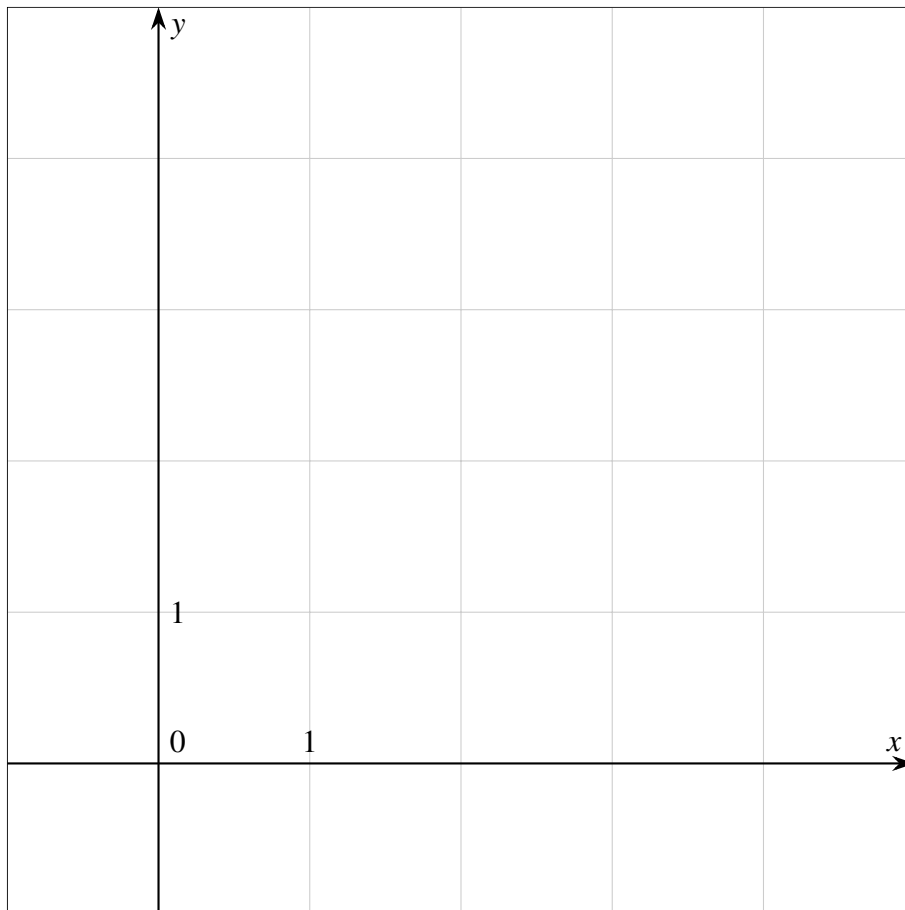
Méthode 3.8 -

Pour représenter graphiquement une suite explicite, on place les points de coordonnées  $(n, u_n)$ .

---

**Exemple 3.9.**

On considère la suite  $(u_n)$  donnée par  $u_n = \frac{1}{4}n^2 + 1$ . Représenter les termes de rang 0, 1, 2, 3, 4.



### 3.2.2 Suite définie par récurrence

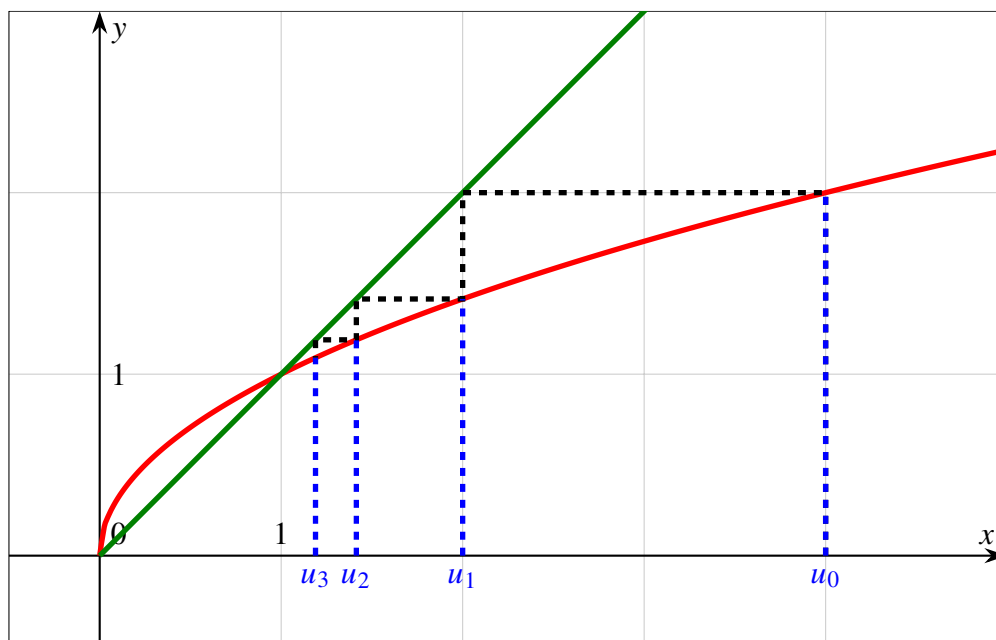
Méthode 3.10 -

Pour construire les termes de la suite  $(u_n)$  définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on utilise les courbes d'équation  $y = x$  et  $y = f(x)$ .

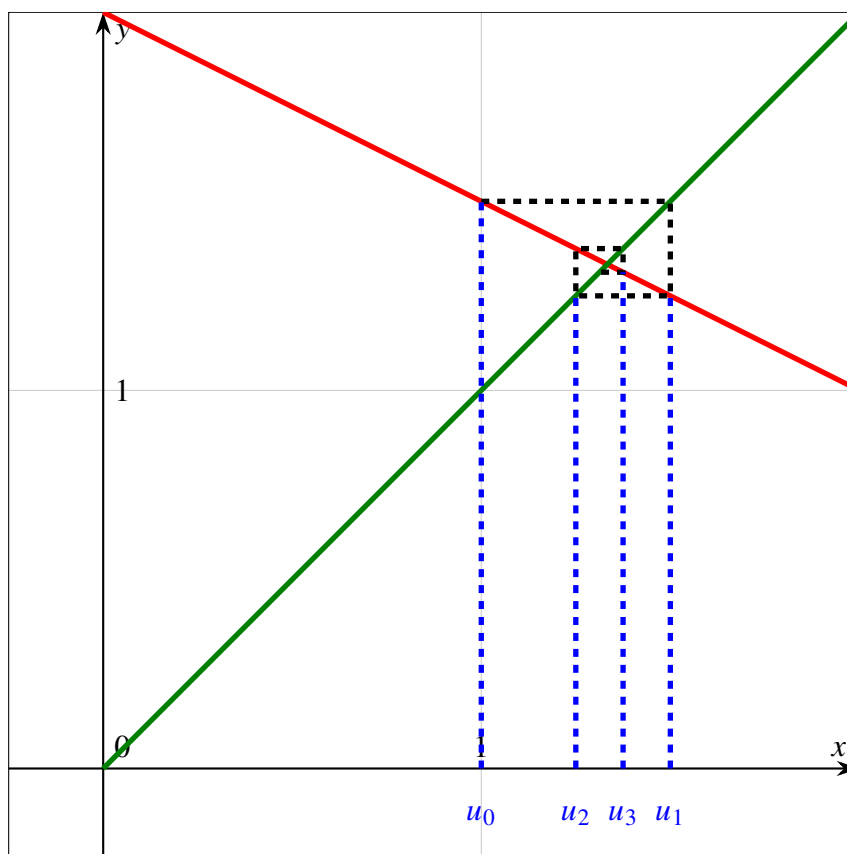
---

**Exemple 3.11.**

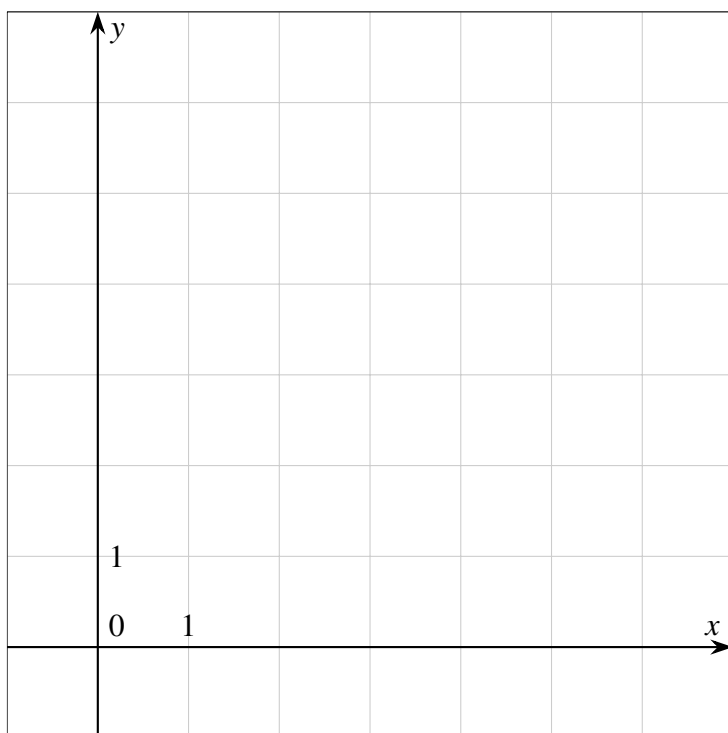
- i) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ .



- ii) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$ .



- iii) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ . Représenter les termes de rang 0, 1, 2 et 3.



### 3.3 Variation d'une suite

#### Definition 3.12 -

Une suite  $(u_n)$  est dite:

- i) **Croissante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- ii) **Décroissante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- iii) **Constante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0$ .

#### Méthode 3.13 -

Pour étudier le sens de variation d'une suite  $(u_n)$ , on étudie le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ .

---

**Exemple 3.14.**

- i) Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par
- $$u_n = n^2 + 3n + 2$$

- ii) Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par
- $$u_n = -n^3$$

- 
- iii) Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ .

## 3.4 Suites arithmétiques

### 3.4.1 Définition

#### Definition 3.15 -

Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel  $R$ , que l'on appelle la **raison**, tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + R$ .

#### Exemple 3.16.

- i) On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison 3. Donner les termes de rang 1, 2 et 3.

---

ii) On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = -5$  et de raison 5. Donner les termes de rang 1, 2, 3 et 4.

iii) On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 0$  et de raison  $-2$ . Donner les termes de rang 1, 2, 3, 4 et 5.

### 3.4.2 Terme général d'une suite arithmétique

**Théorème 3.17 -**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $R$ . On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 + nR$ .

**Remarque 3.18.**

Si  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels, alors on a  $u_n = u_p + (n - p)R$ .

---

## Démonstration



---

Propriété 3.19 -

Soit  $(u_n)$  une suite donnée pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = an + b$ , avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Alors  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $b$  et de raison  $a$ .

**Exemple 3.20.**

i) Donner le terme général de la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison 5.

ii) Donner le terme général de la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $-2$ . Que vaut le terme de rang 42 ?

### 3.4.3 Variation d'une suite arithmétique

Propriété 3.21 -

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $R$ .

- i) Si  $R \geq 0$ , alors  $(u_n)$  est croissante.
- ii) Si  $R \leq 0$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.
- iii) Si  $R = 0$ , alors  $(u_n)$  est constante.

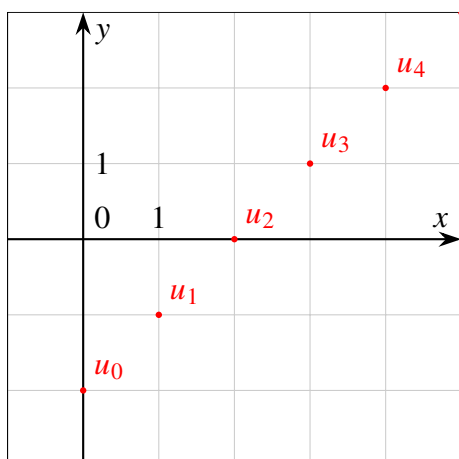


Figure 3.1: Suite arithmétique croissante ( $R > 0$ )

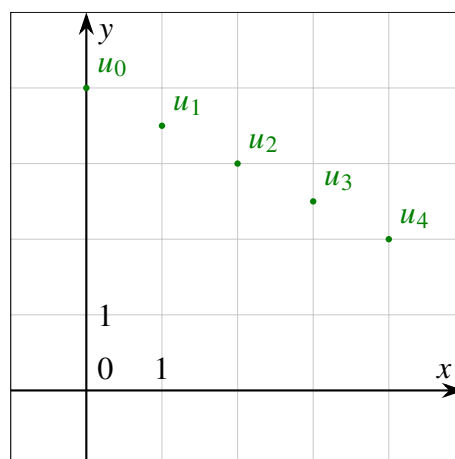


Figure 3.2: Suite arithmétique décroissante ( $R < 0$ )

### Exemple 3.22.

Dire si la suite  $(u_n)$  est croissante ou décroissante en fonction de sa raison.

- i) Raison  $R = \frac{1}{2}$ .
- ii) Raison  $R = -\sqrt{2}$ .
- iii) Raison  $R = 10^{-10}$ .

### 3.4.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 3.23 - Somme des entiers de 1 à  $n$

Soit  $n$  un entier naturel. On a donc

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

## Démonstration



---

### Exemple 3.24.

Calculer la somme des 100 premiers entiers.

#### Théorème 3.25 -

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $R$ .

On a alors:

i) La somme des  $n$  premiers termes est donnée par

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$$

ii) Si  $p$  est un entier naturel inférieur à  $n$ , la somme des termes de  $p$  à  $n$  est donnée par

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(n-p+1)(u_p + u_n)$$

### Exemple 3.26.

i) La suite des nombres pairs forme une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2. Calculer la somme des 50 premiers nombres pairs.

ii) Calculer la somme des termes 10 à 100 de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 5.



---

iii) On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Donner les termes de rang 1, 2, 3, 4 et 5.

---

### 3.5.2 Terme général d'une suite géométrique

**Théorème 3.29** -

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ . On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = q^n u_0$ .

**Remarque 3.30.**

Si  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels, alors on a  $u_n = q^{n-p} u_p$

**Démonstration**

■

## Propriété 3.31 -

Soit  $(u_n)$  une suite donnée pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = a^n b$ , avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Alors  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $b$  et de raison  $a$ .

### Example 3.32.

- i) Donner le terme général de la suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison 5.

### 3.5.3 Variations d'une suite géométrique

Propriété 3.33 -

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $q$  (strictement positive) et de premier terme  $u_0$ .  
Voici le sens de variation en fonction de  $q$  et de  $u_0$ :

| Paramètres | $0 < q \leq 1$ | $1 \leq q$   |
|------------|----------------|--------------|
| $u_0 > 0$  | Décroissante   | Croissante   |
| $u_0 < 0$  | Croissante     | Décroissante |

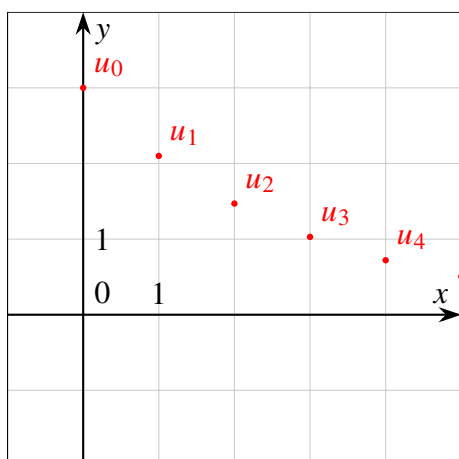


Figure 3.3: Suite géométrique décroissante  
( $u_0 > 0$  et  $0 < q \leq 1$ )

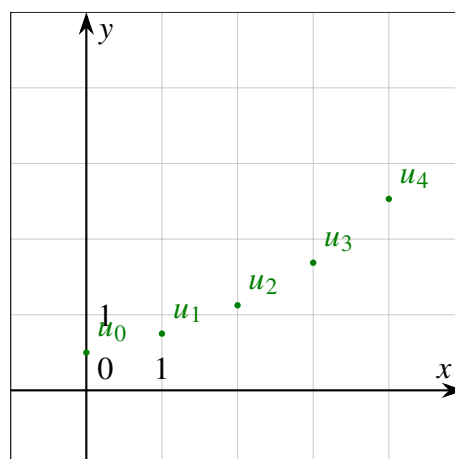


Figure 3.4: Suite géométrique croissante  
( $u_0 > 0$  et  $1 \leq q$ )

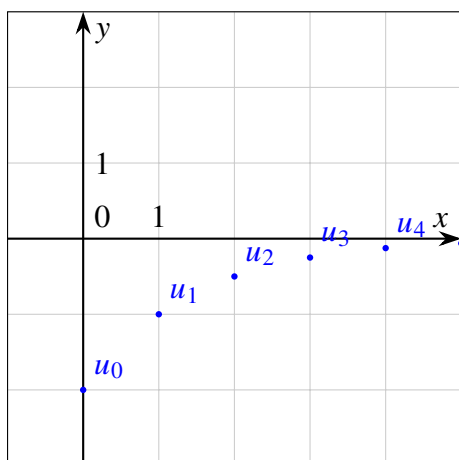


Figure 3.5: Suite géométrique croissante  
( $u_0 < 0$  et  $0 < q \leq 1$ )

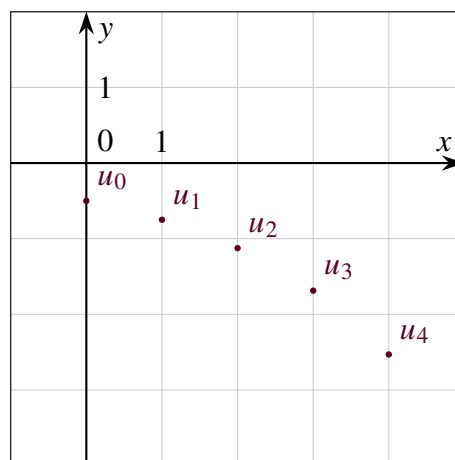


Figure 3.6: Suite géométrique décroissante  
( $u_0 < 0$  et  $1 \leq q$ )

---

**Remarque 3.34.**

Si  $q < 0$ , la suite  $(u_n)$  va osciller, elle n'est donc ni croissante, ni décroissante.

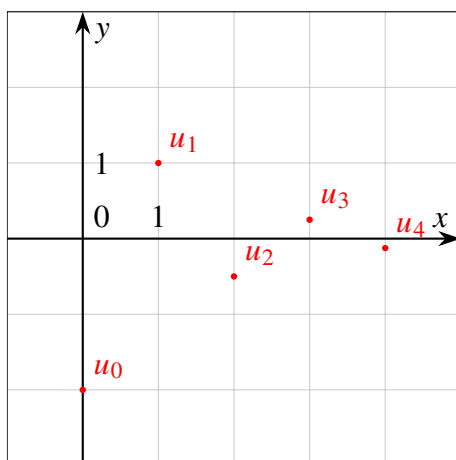


Figure 3.7: Suite géométrique ni croissante, ni décroissante ( $q < 0$ )

**Exemple 3.35.**

Dire si la suite  $(u_n)$  est croissante ou décroissante en fonction de sa raison et de son premier terme.

- i) Raison  $q = \frac{1}{2}$  et premier terme  $u_0 = 1$ .
- ii) Raison  $q = \sqrt{3}$  et premier terme  $u_0 = 2$ .
- iii) Raison  $q = 10^{-5}$  et premier terme  $u_0 = -1$ .
- iv) Raison  $q = 2^{10}$  et premier terme  $u_0 = -\frac{1}{3}$ .

**3.5.4 Somme des termes d'une suite géométrique****Propriété 3.36 -**

Si  $q$  est un nombre réel différent de 1, alors on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{1+n}}{1 - q}$$

**Remarque 3.37.**

Dans le cas où  $q = 1$ , on a une suite arithmétique de raison 0.

---

## Démonstration



---

### Exemple 3.38.

Calculer la somme des 64-ièmes premières puissances de 2 (donc de 0 à 63) et exprimer le résultat en utilisant une puissance de 2.

#### Théorème 3.39 -

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q \neq 1$ . On a alors:

i) La somme des  $n$  premiers termes est donnée par

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

ii) Si  $p$  est un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ , la somme des termes de  $p$  à  $n$  est donnée par

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

### Exemple 3.40.

Calculer la somme des termes 3 à 10 de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{2}$